

ЮМИ

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTRE OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE
DON STATE TECHNICAL UNIVERSITY
SOUTH FEDERAL UNIVERSITY

REVIEW OF SCIENCE • THE SOUTH OF RUSSIA

MATHEMATICAL FORUM

V o l u m e 11

STUDIES ON
MATHEMATICAL ANALYSIS,
DIFFERENTIAL EQUATIONS,
AND THEIR APPLICATIONS

Moscow
2017

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

И Т О Г И Н А У К И • Ю Г Р О С С И И

С Е Р И Я
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФОРУМ

Т о м 11

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО
МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ,
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯМ

Москва
2017

ББК 22.16+
УДК 517.21
М 34

Редакторы серии:
д. ф.-м. н. Ю. Ф. Коробейник,
д. ф.-м. н. А. Г. Кусраев

Редакторы тома:
д. ф.-м. н. А. В. Абанин,
д. ф.-м. н. С. Н. Асхабов,
д. ф.-м. н. А. О. Ватульян,
д. ф.-м. н. И. Е. Малова

Издается в соответствии с распоряжением президиума Российской академии наук от 24 октября 2017 г. № 10106-765 по представлению Отделения математических наук РАН и распространяется бесплатно.

Математический форум. Т. 11. Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям; ЮМИ ВНЦ РАН. — Москва: РАН, 2017. — 268 с. (Итоги науки. Юг России.)

Настоящий сборник представляет собой одиннадцатый том серии «Математический форум», в который вошли материалы Международной конференции «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование» (Дивноморск, 7–14 сентября 2016 г.).

Mathematical Forum. Vol. 11. Studies on Mathematical Analysis, Differential Equations, and Their Applications; SMI VSC RAS. — Moscow: RAS, 2017. — 268 p. (Review of Science: The South of Russia.)

This collection is the ninth volume in «Mathematical Forum» series and comprises proceedings of the International Conference «Operators Theory, Complex Analysis, and Mathematical Modelling» (Divnomorsk, Russia, September 7–14, 2016).

ISBN 978-5-906906-53-3

© Южный математический институт —
филиал ВНЦ РАН, 2017

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник представляет собой одиннадцатый выпуск серии «Математический форум», который издается совместно Южным математическим институтом — филиалом Владикавказского научного центра Российской академии наук и факультетом математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета. Цель издания — укрепление позиций фундаментальной математики и интеграция научных исследований на Юге России, расширение и углубление научных контактов математиков региона с российскими и зарубежными коллегами.

В сборник вошли материалы XIII Международной конференции «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование», состоявшейся в Дивноморске с 7 по 14 сентября 2016 г. Организаторами конференции выступили Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН (г. Владикавказ), Южный федеральный университет (г. Ростов-на-Дону) и Донской государственный технический университет (г. Ростова-на-Дону).

В работе конференции приняли участие специалисты по математическому анализу, дифференциальным и интегральным уравнениям, математическому моделированию и современным проблемам математического образования из разных городов России, а также зарубежья (Китай, Таджикистан, Казахстан). Тезисы докладов участников конференции опубликованы на официальном сайте Южного математического института ВНИЦ РАН (www.smath.ru).

Открывается сборник пятью статьями, написанными на основе пленарных докладов, представленных на конференции.

Статья Н. А. Абиева и Ю. Г. Никонорова представляет собой обзор недавних результатов, связанных с изучением эволюции римановых метрик положительной кривизны на пространствах Уоллаха и обобщенных пространствах Уоллаха под влиянием нормализованного потока Риччи. Обсуждаются также некоторые результаты, относящиеся к более общим однородным пространствам.

В статье А. Б. Батхина дается методика получения глобального параметрического представления одного вещественного алгебраического многообразия в \mathbb{R}^3 , особые точки которого играют важную роль в изучении нормализованного потока Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха с использованием методов теории исключений и методов компьютерной алгебры.

В статье А. Д. Брюно предлагаются методы вычисления решений алгебраического уравнения от трех неизвестных вблизи особой точки. Эти методы суть: многогранник Ньютона, степенные преобразования, новые варианты теоремы о неявной функции и униформизация плоской алгебраической кривой.

Статья А. О. Ватульяна и С. А. Нестерова посвящена задаче о нахождении наведенной разности потенциалов термоэлектродупругого слоя. Получены аналитическое решение для однородного слоя и численное решение для неоднородного слоя. Рассмотрено влияние различных законов неоднородности на наведенный электрический потенциал.

В статье Н. Е. Смирнова и В. А. Тестова сетевое образовательное пространство рассматривается как сложная открытая самоорганизующаяся система и в этой связи обсуждается синергетический подход как методологическая основа образовательной парадигмы информационного общества.

Секция математического анализа и его приложений.

В статье А. А. Аливердиева, Э. Н. Ахмедова, В. Д. Бейбалаева, Р. А. Магомедова, Р. П. Мейланова и Р. Р. Мейланова выведено однопараметрическое уравнение состояния и с его помощью получены аналитические выражения для термодинамических характеристик вещества, исходя из обобщения равновесной термодинамики на случай производных дробного порядка.

В статье В. Б. Васильева дано описание ядра дискретного лапласиана в многомерном полупространстве квадратично интегрируемых функций. Отсюда выводятся результат об однозначной разрешимости дискретного аналога задачи Дирихле и дискретный аналог формулы Пуассона.

В статье А. Э. Пасенчука изучается специальный класс операторов Теплица в пространстве функций на торе, суммируемых с квадратом. Устанавливается свойство нестандартной частичной мультипликативности и приводятся некоторые приложения этого свойства.

Статья В. В. Шустова посвящена задаче интегрирования функции на основе ее приближения двухточечными интерполяционными многочленами Эрмита. Проведено сравнение двухточечного приближения интеграла с методом, основанным на использовании формулы Эйлера — Маклорена.

Секция дифференциальных, интегральных уравнений и математического моделирования.

Система реакции-диффузии с кубической нелинейностью, представляющая собой бесконечномерный аналог классической системы Рэлея, изучается в статье А. В. Казарникова и С. В. Ревиной. На границе области задаются однородные краевые условия Неймана. Найдены критические значения параметра, при которых происходит бифуркация рождения цикла или возникновение новых стационарных режимов, построена асимптотика этих вторичных решений.

В статье Ш. Т. Каримова исследован аналог второй краевой задачи для сингулярного полипараболического уравнения с оператором Бесселя. В отличие от традиционных методов, применяя оператор Эрдейи — Кобера дробного порядка, найдена явная формула решения поставленной задачи.

В статье М. В. Кукушкина получен результат, характеризующий рост собственных значений задачи Штурма — Лиувилля для дифференциального оператора второго порядка с дробными производными в младших членах.

Статья Н. В. Курбатовой, Е. Н. Портнова и Ю. А. Устинова посвящена новой теории каната, опирающейся на спектральную теорию операторов. Получены новые формулы для расчета матрицы жесткостей и жесткости на растяжения в широком диапазоне изменения параметров.

В статье А. Ю. Переварюхи рассмотрены методы моделирования репродуктивного цикла популяций с учетом меняющихся эколого-физиологических особенностей осетровых рыб Каспийского моря. Система трех дифференциальных уравнений для описания взаимосвязи убыли численности поколения и приращения веса молоди рыб дополнена с учетом отмечаемых в наблюдениях колебаний скорости роста молоди. Уравнения предназначены для сценарного моделирования в задаче анализа эффективности искусственной интродукции выращенных в различных условиях особей в естественную среду.

В статье Л. Ю. Плиевой строятся квадратурные формулы интерполяционного типа для интегралов типа Коши с весовыми функция-

ми, причем в качестве узлов интерполирования берется совокупность нулей двух ортогональных многочленов по данному весу.

Обзор работ по численным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений I рода, выполненных в отделе математического моделирования Южного математического института ВНЦ РАН в последнее время, представлен в статье Ш. С. Хубежты.

Спектр установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости между двумя проницаемыми концентрическими сферами исследован в статье А. С. Черныша. С помощью метода Вишика — Люстерника получена формальная асимптотика решения соответствующей спектральной задачи.

Секция современных проблем математического образования.

В статье А. С. Бабенко, Д. В. Елкина, А. А. Пигузова, В. С. Секованова и Е. И. Смирнова указаны методические приемы изучения множества Жюлиа полиномов Чебышева. Предложен алгоритм построения множества Жюлиа для полиномов Чебышева.

Некоторые аспекты использования информационно-коммуникационных технологий при изучении в высшей школе дисциплин естественнонаучного цикла рассмотрены в статье В. В. Богуна. Представлены методические аспекты использования разработанной автором дистанционной системы динамических расчетных проектов.

Весьма актуальным является вопрос о целесообразности использования в учебном процессе высшей школы интегративных курсов, которые способствуют взаимообогащающему синтезу знаний при решении комплексных междисциплинарных проблем. В статье С. Н. Дворяткиной и С. А. Розановой предложен возможный механизм реализации принципа междисциплинарности через создание интегративных курсов, в структуре которых ведущее место отводится методу математического моделирования.

В статье И. Е. Маловой предложена методика анализа школьных учебников с позиций реализации в них как деятельностного подхода, личностно ориентированного обучения, так и различных образовательных технологий на примере текстовых задач.

Связь науки и образования носит циклический характер: периоды интеграции и дезинтеграции сменяют друг друга. Статья В. П. Одица посвящен анализу современного дезинтеграционного процесса, названного «атомизацией».

А. Г. Кусраев

Пленарные доклады

ОБ ЭВОЛЮЦИИ РИМАНОВЫХ МЕТРИК ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ НА ПРОСТРАНСТВАХ УОЛЛАХА ПОД ВЛИЯНИЕМ ПОТОКА РИЧЧИ¹

Н. А. Абиев, Ю. Г. Никоноров

Статья посвящена обзору свежих результатов, связанных с изучением эволюции римановых метрик положительной кривизны на пространствах Уоллаха $SU(3)/T_{\max}$, $Sp(3)/Sp(1) \times Sp(1) \times Sp(1)$ и $F_4/Spin(8)$. Обсуждается тот факт, что на всех пространствах Уоллаха нормализованный поток Риччи переводит все метрики общего положения с положительной секционной кривизной в метрики со смешанной секционной кривизной, а также то, что для пространств $Sp(3)/Sp(1) \times Sp(1) \times Sp(1)$ и $F_4/Spin(8)$ нормализованный поток Риччи переводит все метрики общего положения с положительной кривизной Риччи в метрики со смешанной кривизной Риччи. Также обсуждаются некоторые результаты, относящиеся к более общим однородным пространствам.

Ключевые слова: пространства Уоллаха, обобщенные пространства Уоллаха, риманова метрика, поток Риччи, секционная кривизна, кривизна Риччи, скалярная кривизна, плоская динамическая система, особая точка.

1. Введение и основные результаты

Исследование римановых многообразий с положительной секционной кривизной имеет долгую историю. Особый интерес среди них представляют однородные римановы многообразия. Помимо симметрических пространств ранга один к таковым относятся несколько однородных пространств размерности 6, 7, 12, 13 и 24 согласно результатам М. Берже [16], Н. Р. Уоллаха [38] и С. Алоффа—Н. Р. Уоллаха [14]. Однородные пространства, допускающие инвариантные римановы метрики положительной секционной кривизны, полностью классифицированы в работах [15, 16, 38]. Однако, как недавно заметили М. Ксу и Дж. А. Вольф в [40], существует пробел в доказательстве классификации Л. Берара-Бержери нечетномерных однородных пространств с положительной кривизной в случае многообразия

¹Работа выполнена при поддержке гранта 1452/ГФ4 Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2015–2017 гг.

Штифеля $Sp(2)/U(1) = SO(5)/SO(2)$. Уточненное доказательство соответствующего результата было получено Б. Уилкингом (см. [40, теорема 5.1]). Недавняя статья [39] Б. Уилкинга и В. Циллера представляет новое и короткое доказательство классификации однородных римановых многообразий положительной кривизны. Подробное изложение различных результатов по структуре множества инвариантных метрик с положительной секционной кривизной, их наилучших константах заземленности и полных группах изометрий может быть найдено в работах [4–7, 10, 35–37].

Естественным является исследование вопроса о том, сохраняется ли положительность секционной кривизны или кривизны Риччи римановой метрики под влиянием потока Риччи [17, 26]. Обзор работ по эволюции римановых метрик положительной кривизны под влиянием потока Риччи может быть найден в статье [30] Л. Ни. В работах [18–22, 24, 27–29, 33, 34] и цитируемой в них литературе можно найти интересные результаты, охватывающие различные аспекты упомянутого выше вопроса.

В настоящей работе ставится цель краткого изложения основных результатов работ [1] и [13], посвященных изучению эволюции инвариантных римановых метрик на пространствах Уоллаха и обобщенных пространствах Уоллаха под влиянием нормализованного потока Риччи

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g}(t) = -2 \operatorname{Ric}_{\mathbf{g}} + 2 \mathbf{g}(t) \frac{S_{\mathbf{g}}}{n}, \quad (1)$$

где $\mathbf{g}(t)$ означает 1-параметрическое семейство римановых метрик на n -мерном римановом многообразии \mathcal{M}^n , $\operatorname{Ric}_{\mathbf{g}}$ и $S_{\mathbf{g}}$ — тензор Риччи и скалярная кривизна метрики \mathbf{g} соответственно (см. [26]).

1.1. Эволюция римановых метрик положительной кривизны на пространствах Уоллаха. Рассмотрим пространства Уоллаха:

$$\begin{aligned} W_6 &:= SU(3)/T_{\max}, \\ W_{12} &:= Sp(3)/Sp(1) \times Sp(1) \times Sp(1), \\ W_{24} &:= F_4/Spin(8), \end{aligned}$$

допускающие инвариантные римановы метрики положительной секционной кривизны [38]. Заметим, что эти пространства являются тотальными пространствами для следующих субмерсий: $S^2 \rightarrow W_6 \rightarrow \mathbb{CP}^2$, $S^4 \rightarrow W_{12} \rightarrow \mathbb{HP}^2$, $S^8 \rightarrow W_{24} \rightarrow \operatorname{CaP}^2$.

На каждом пространстве Уоллаха G/H множество инвариантных метрик зависит от трех положительных параметров x_1 , x_2 и x_3 (см. (2) ниже). Подпространство инвариантных метрик, удовлетворяющих равенству $x_i = x_j$ при некоторых $i \neq j$, является инвариантным относительно нормализованного потока Риччи, поскольку такие метрики имеют более обширную связную группу изометрий. Действительно, метрика с двумя совпадающими параметрами допускает дополнительные изометрии, порождаемые правыми действиями группы $K \subset G$ с алгеброй Ли $\mathfrak{k} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}_k$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ (см. подробности в [31]). Все такие метрики связаны с упомянутыми выше субмерсиями вида $K/H \rightarrow G/H \rightarrow G/K$, порожденными вложениями $H \subset K \subset G$ (см., например, [17, гл. 9]). Исходя из этого, такие метрики мы будем называть *исключительными* или *метриками субмерсии*. Они образуют три однопараметрических семейства с точностью до подобия. Все другие метрики (с тремя попарно различными параметрами) мы будем называть *метриками общего положения*. Наш первый результат содержится в следующей теореме.

Теорема 1 [13]. *На пространствах Уоллаха W_6 , W_{12} и W_{24} нормализованный поток Риччи переводит все метрики общего положения с положительной секционной кривизной в метрики со смешанной секционной кривизной.*

Следует отметить также, что нормализованный поток Риччи за конечное время выводит каждую метрику общего положения из множества метрик с положительной секционной кривизной и никогда не возвращает ее обратно в это множество. Величина соответствующего временного промежутка зависит от выбора метрики и может быть сколь угодно большой.

Из теоремы 1 вытекает результат, полученный М. Чёнгом и Н. Р. Уоллахом в работе [24]: на пространствах Уоллаха W_6 , W_{12} и W_{24} нормализованный поток Риччи переводит некоторые метрики с положительной секционной кривизной в метрики со смешанной секционной кривизной.

Наш второй результат относится к эволюции инвариантных римановых метрик с положительной кривизной Риччи.

Теорема 2 [13]. *На пространствах Уоллаха W_{12} и W_{24} нормализованный поток Риччи переводит все метрики общего положения с положительной кривизной Риччи в метрики со смешанной кривизной Риччи.*

Более того, нормализованный поток Риччи за конечное время выводит каждую метрику общего положения из множества метрик с положительной кривизной Риччи и никогда не возвращает ее обратно в это множество. Величина соответствующего временного промежутка зависит от выбора метрики и может быть сколь угодно большой.

Отметим также, что нормализованный поток Риччи переводит некоторые метрики со смешанной кривизной Риччи в метрики с положительной кривизной Риччи. Понятно, что впоследствии подобные метрики безвозвратно покидают множество метрик с положительной кривизной Риччи.

К. Бём и Б. Уилкинг в статье [21] изучали (в частности) некоторые свойства (нормализованного) потока Риччи на пространстве Уоллаха W_{12} . Ими было доказано, что на W_{12} (нормализованный) поток Риччи может переводить некоторые метрики с положительной секционной кривизной в метрики со смешанной кривизной Риччи (см. [21, теорема 3.1]). Такое же утверждение для пространства W_{24} было доказано в [24, теорема 3]. С другой стороны, как доказано в теореме 8 работы [24], на пространстве W_6 каждая инвариантная метрика с положительной секционной кривизной сохраняет положительность кривизны Риччи под влиянием потока Риччи. Следовательно, теорема 2 неверна для W_6 . Однако следует отметить, что на W_6 некоторые инвариантные метрики с положительной кривизной Риччи могут быть переведены потоком Риччи в метрики со смешанной кривизной Риччи (см. [24, теорема 3] или замечание 2 ниже). Принципиальное различие между W_6 и двумя другими пространствами Уоллаха объясняется в лемме 4.

1.2. Эволюция римановых метрик положительной кривизны Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха. Согласно [8, 9, 32] обобщенные пространства Уоллаха определяются как компактные однородные пространства G/H , представление изотропии которых раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \mathfrak{p}_3$ трех $\text{Ad}(H)$ -инвариантных неприводимых модулей, удовлетворяющих условию $[\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_i] \subset \mathfrak{h}$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Известно [9], что каждому такому пространству соответствует тройка числовых параметров $a_i := A/d_i \in [0, 1/2]$, $i = 1, 2, 3$, где A — неотрицательное число, $d_i := \dim(\mathfrak{p}_i)$. Стоит отметить, что каждое пространство Уоллаха является обобщенным пространством Уоллаха с параметрами $a_1 = a_2 = a_3 := a$, причем для этих пространств соответственно $a = 1/6$, $a = 1/8$ и $a = 1/9$ (см. [31]). Пусть на алгебре Ли \mathfrak{g} груп-

пы Ли G выбрано $\text{Ad}(G)$ -инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда на G/H произвольная G -инвариантная риманова метрика \mathbf{g} определяется $\text{Ad}(H)$ -инвариантным скалярным произведением

$$(\cdot, \cdot) = x_1 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_1} + x_2 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_2} + x_3 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{p}_3}, \quad (2)$$

где x_1, x_2, x_3 — положительные действительные числа.

Отметим, что классификация обобщенных пространств Уоллаха получена Ю. Г. Никоноровым в [31] и независимо от него группой авторов Дж. Чен, Ю. Канг, К. Лианг в [23], причем классификация в [31] является полной, в то время как в [23] она получена в предположении простоты группы G .

Для обобщенных пространств Уоллаха с $a_1 = a_2 = a_3$ нами получено следующее обобщение теоремы 2.

Теорема 3 [13]. Пусть G/H является обобщенным пространством Уоллаха с $a_1 = a_2 = a_3 := a$, где $a \in (0, 1/4) \cup (1/4, 1/2)$. Тогда если $a < 1/6$, то нормализованный поток Риччи переводит все метрики общего положения с положительной кривизной Риччи в метрики со смешанной кривизной Риччи; если $a \in (1/6, 1/4) \cup (1/4, 1/2)$, то нормализованный поток Риччи переводит все метрики общего положения в метрики с положительной кривизной Риччи.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Согласно (см. [31]) условию $a_1 = a_2 = a_3 = a$ удовлетворяет бесконечное число обобщенных пространств Уоллаха. Например, случаю $a = k/(6k + 2) < 1/6$ соответствуют пространства $Sp(3k)/Sp(k) \times Sp(k) \times Sp(k)$, в то время как пространства $SO(3k)/SO(k) \times SO(k) \times SO(k)$, $k > 2$, имеют $1/6 < a = k/(6k - 4) < 1/4$. Отметим также, что числу $a = 1/4$ соответствуют $SO(6)/SO(2) \times SO(2) \times SO(2)$ и другие обобщенные пространства Уоллаха весьма своеобразной конструкции (см. детали в [31, теорема 1]). Группа Ли $SU(2)$ тоже является примером обобщенного пространства Уоллаха, соответствующим случаю $a = 1/2$. Случай $a = 1/6$ представляет для нас особый интерес — ему соответствуют, например, кэлеровы пространства $SU(3k)/S(U(k) \times U(k) \times U(k))$. Стоит также отметить, что далеко не каждая такая тройка $(a_1, a_2, a_3) \in (0, 1/2]^3$ может соответствовать некоторому обобщенному пространству Уоллаха (см. [31]).

Сформулируем теперь результат, относящийся к случаю $a = 1/6$ и обобщающий теорему 8 из [24].

Теорема 4 [13]. Пусть G/H является обобщенным пространством Уоллаха с $a_1 = a_2 = a_3 = 1/6$. Тогда нормализованный поток Риччи сохраняет положительность кривизны Риччи метрик общего положения (2), удовлетворяющих условию $x_k < x_i + x_j$, где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Еще один весьма специфический случай обобщенных пространств Уоллаха, соответствующих значению $a = 1/4$, изучен в [1], где доказана следующая теорема, дополняющая теорему 3.

Теорема 5 [1]. На обобщенном пространстве Уоллаха G/H с $a_1 = a_2 = a_3 = 1/4$ нормализованный поток Риччи переводит все метрики общего положения в метрики с положительной кривизной Риччи.

Более того, для каждой метрики общего положения из множества метрик со смешанной кривизной Риччи существует свое конечное время, за которое нормализованный поток Риччи раз и навсегда переводит эту метрику в область метрик с положительной кривизной Риччи.

Отметим, что наши результаты согласуются с результатами [21] и [24], однако наш подход к решению задачи в большей степени основан на использовании аппарата теории динамических систем [3, 25]. Другой важной составляющей нашего подхода является подробное аналитическое описание множеств метрик, имеющих положительную секционную кривизну и положительную кривизну Риччи.

Известно, что метрика (2) обладает объемом стандартной метрики (т. е. инвариантной римановой метрики, порожденной $\text{Ad}(G)$ -инвариантным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$) тогда и только тогда, когда $x_1 x_2 x_3 = 1$. Ясно, что теоремы 1–5 достаточно доказывать только для инвариантных метрик, удовлетворяющих условию

$$\text{Vol} = x_1 x_2 x_3 \equiv 1.$$

Поскольку нормализованный поток Риччи сохраняет объем, мы предпочитаем использовать его вместо обычного потока Риччи (см. подробности в [2, 11, 12]).

Работа имеет следующую структуру: раздел 1 содержит общие сведения, в разделе 2 приводятся формулировки основных лемм 2–7, необходимых для доказательства теорем 1–5.

2. Предварительные сведения

2.1. Сведение (1) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Ясно, что при $a_1 = a_2 = a_3 := a$ для размерностей d_i модулей \mathfrak{p}_i имеем $d_1 = d_2 = d_3 := d$. Напомним, что для пространств W_6 , W_{12} и W_{24} постоянная a равняется $1/6$, $1/8$ и $1/9$ соответственно (см. подробности в [11]). Напомним также представление для оператора Риччи метрики (2):

$$\text{Ric} = \mathbf{r}_1 \text{Id}|_{\mathfrak{p}_1} + \mathbf{r}_2 \text{Id}|_{\mathfrak{p}_2} + \mathbf{r}_3 \text{Id}|_{\mathfrak{p}_3},$$

где $\mathbf{r}_i := \frac{x_j x_k + a(x_i^2 - x_j^2 - x_k^2)}{2x_1 x_2 x_3}$ — главные значения кривизны Риччи, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Следовательно, для скалярной кривизны S такой метрики имеем

$$S = d \cdot \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{2x_1 x_2 x_3}.$$

Используя эти равенства, уравнение (1) на пространствах Уоллаха может быть сведено к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = -2x_i(t) \left(\mathbf{r}_i - \frac{S}{n} \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где $n = \dim(\mathfrak{p}_1) + \dim(\mathfrak{p}_2) + \dim(\mathfrak{p}_3) = 3d$.

Введем координаты, инвариантные относительно масштабирования:

$$w_1 := \frac{x_3}{x_1}, \quad w_2 := \frac{x_3}{x_2}.$$

Так как (3) автономна и

$$\frac{1}{w_i} \frac{dw_i}{dt} = \frac{1}{x_3} \frac{dx_3}{dt} - \frac{1}{x_i} \frac{dx_i}{dt} = -2(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_i), \quad i = 1, 2,$$

то (3) можно привести к следующей системе относительно $w_1 > 0$ и $w_2 > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{dt} &= f(w_1, w_2) := (w_1 - 1)(w_1 - 2aw_1w_2 - 2aw_2), \\ \frac{dw_2}{dt} &= g(w_1, w_2) := (w_2 - 1)(w_2 - 2aw_1w_2 - 2aw_1), \end{aligned} \quad (4)$$

где $t := x_3/t$ ($x_3 > 0$) — новый параметр времени, не меняющий интегральные кривые и их ориентацию.

2.2. Инвариантные кривые и особые точки системы (4).

Легко доказать следующую лемму.

Лемма 1. При $w_1 > 0$ и $w_2 > 0$ справедливы следующие утверждения:

1) Кривые c_1, c_2 и c_3 , определенные соответственно уравнениями $w_2 = 1$, $w_1 = 1$ и $w_2 = w_1$, являются инвариантными относительно системы (4);

2) При $a \neq 1/4$ система (4) имеет ровно четыре невырожденные особые точки $E_0 = (1, 1)$, $E_1 = (q, 1)$, $E_2 = (1, q)$, $E_3 = (q^{-1}, q^{-1})$, где $q := 2a(1 - 2a)^{-1}$. Более того, E_1, E_2 и E_3 являются седлами, а E_0 — неустойчивым узлом.

Очевидно, что прямые c_1, c_2 и c_3 имеют общую точку E_0 и разделяют область $(0, \infty)^2$ на 6 связных, попарно непересекающихся компонент. Ввиду симметрии, присущей пространствам Уоллаха, достаточно изучать поведение решений системы (4) в компоненте (см. подробности в [13])

$$\Omega := \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 : w_2 > w_1 > 1\}.$$

2.3. Множество D метрик положительной секционной кривизны. Для пространств Уоллаха подробное описание инвариантных метрик с положительной секционной кривизной было дано Ф. М. Валиевым в [4, теорема 3]. Здесь мы переформулируем его результаты в координатах (w_1, w_2) . Как показано в [13], множество метрик, допускающих положительную секционную кривизну, ограничивается кривыми s_1, s_2 и s_3 (см. левую панель, рис. 1), заданными соответственно уравнениями

$$\begin{aligned} w_1^2 w_2^2 - 2w_1^2 w_2 + 2w_1 w_2^2 + w_1^2 + 2w_1 w_2 - 3w_2^2 &= 0, \\ w_1^2 w_2^2 + 2w_1^2 w_2 - 2w_1 w_2^2 - 3w_1^2 + 2w_1 w_2 + w_2^2 &= 0, \\ 3w_1^2 w_2^2 - 2w_1^2 w_2 - 2w_1 w_2^2 - w_1^2 + 2w_1 w_2 - w_2^2 &= 0, \end{aligned}$$

где $w_1 > 0$ и $w_2 > 0$. Несложно убедиться, что это множество связно. Обозначим его через D . Заметим также, что $s_i \cap s_j = \emptyset$ при $w_1 > 0$ и $w_2 > 0$, где $i \neq j$.

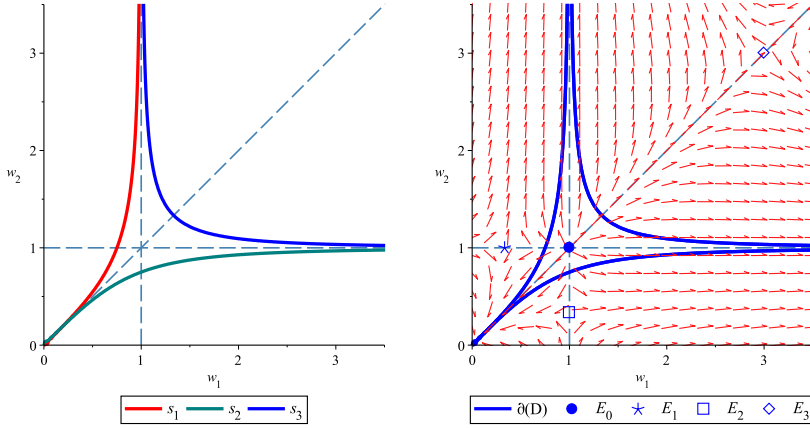


Рис. 1. кривые s_1, s_2, s_3 (левая панель);
фазовый портрет системы (4) при $a = 1/8$ (правая панель).

2.4. Множество R метрик положительной кривизны Риччи. Пусть дано пространство Уоллаха G/H (т. е. зафиксировано одно из значений $a = 1/6$, $a = 1/8$ или $a = 1/9$). Тогда множество метрик, имеющих положительную кривизну Риччи, в координатах (w_1, w_2) ограничивается кривыми r_1, r_2 и r_3 (рис. 2), заданными соответственно уравнениями

$$aw_1^2w_2^2 + aw_1^2 - aw_2^2 - w_1^2w_2 = 0,$$

$$aw_1^2w_2^2 - aw_1^2 + aw_2^2 - w_1w_2^2 = 0,$$

$$aw_1^2w_2^2 - aw_1^2 - aw_2^2 + w_1w_2 = 0.$$

Каждая кривая $r_i, i = 1, 2, 3$, состоит из двух связных компонент. Очевидно, что $r_i \cap s_j = \emptyset$ при $i, j \in \{1, 2, 3\}$ и $w_1 > 0, w_2 > 0$. Очевидно также, что $c_1 \cap r_2 \cap r_3 = \{P_1\}$, $c_2 \cap r_1 \cap r_3 = \{P_2\}$, $c_3 \cap r_1 \cap r_2 = \{P_3\}$, где $P_1 := (a, 1)$, $P_2 := (1, a)$, $P_3 := (a^{-1}, a^{-1})$. Легко установить также следующие свойства кривых r_i : c_3 является касательной к кривым r_1 и r_2 в точке $(0, 0)$, в то время как пары (r_1, r_3) и (r_2, r_3) имеют асимптоты c_2 и c_1 соответственно (см. подробности в [13]).

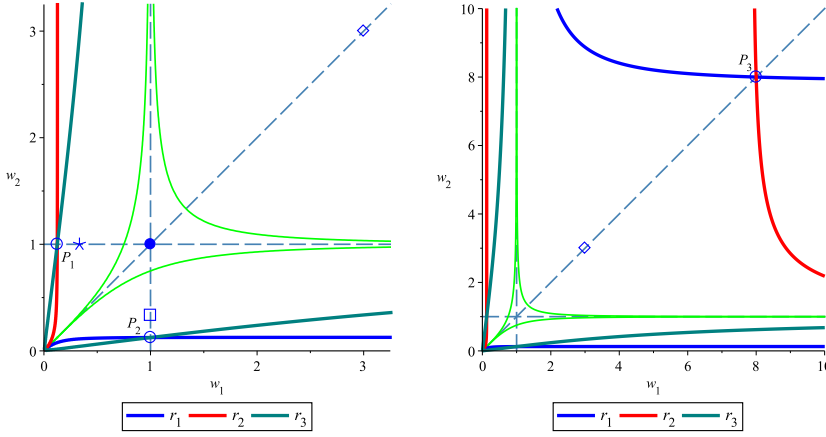


Рис. 2. Кривые r_1, r_2, r_3 и точки P_1, P_2, P_3 , соответствующие системе (4) при $a = 1/8$.

3. Схемы доказательств основных результатов

Доказательство теоремы 1 вытекает из следующих двух лемм, результаты которых проиллюстрированы на правой панели рис. 1.

Лемма 2. Если $a \in (0, 1/4)$, то каждая интегральная кривая системы (4), начинающаяся в $D \setminus (c_1 \cup c_2 \cup c_3)$, достигает границы $s_1 \cup s_2 \cup s_3$ области D за конечное время и покидает D . Это время может быть как угодно большим в зависимости от выбора начальной точки.

Лемма 3. Пусть $a \in \{1/9, 1/8, 1/6\}$. Тогда интегральная кривая системы (4) не может вернуться обратно в D , покинув D однажды.

Доказательство теоремы 2 вытекает из следующих двух лемм, результаты которых иллюстрированы на рис. 3.

Лемма 4. Если $a \in (0, 1/6)$, то любая интегральная кривая системы (4), начинающаяся в $R \setminus (c_1 \cup c_2 \cup c_3)$, достигает границы $r_1 \cup r_2 \cup r_3$ области R за конечное время и покидает R . Это время может быть как угодно большим в зависимости от выбора начальной точки.

Лемма 5. Пусть $a \in \{1/9, 1/8, 1/6\}$. Тогда интегральная кривая системы (4) не может вернуться обратно в R , покинув R однажды.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Фактически некоторые интегральные кривые системы (4), берущие начало вне R , могут достичь R через часть кривой r_1 , заключенной между точками P_3 и Q (см. [13] для точных координат точки Q), пересекая $r_1 \subset \partial(R)$ сверху вниз (рис. 3). Впоследствии эта интегральная кривая покидает R безвозвратно, если достигнет $\partial(R)$. Следовательно, в частности, нормализованный поток Риччи может переводить некоторые метрики со смешанной кривизной Риччи в метрики с положительной кривизной Риччи.

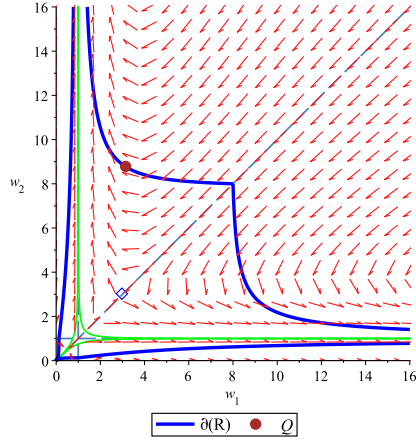


Рис. 3. Фазовый портрет системы (4) при $a = 1/8$.

Доказательство теоремы 3 существенно опирается на аппарат, разработанный для доказательства теоремы 2 (см. [13, предложение 1]).

Доказательство теоремы 4 основано на наблюдении, что при $a = 1/6$ множества инвариантных метрик со свойством $x_i = x_j + x_k$ при различных значениях индексов представляют собой в координатах (w_1, w_2) сепаратрисы системы (4).

Доказательство теоремы 5 опирается на следующие две леммы.

Лемма 6. При $a = 1/4$ любая интегральная кривая системы (4), начинающаяся вне R , за конечное время попадает в область R и остается в ней навсегда. Причем это время может быть достаточно большим в зависимости от выбора начальной точки.

Лемма 7. При $a = 1/4$ интегральные кривые системы (4) могут пересекать границу области R не более одного раза.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $a = 1/4$ из леммы 1 легко получить единственную особую точку $(1, 1)$ системы (4). Однако тип этой точки по лемме 1 определить невозможно. Согласно результатам [11, теорема 2] имеет место качественная перестройка фазового портрета, когда четыре невырожденные особые точки сливаются в одну сложную вырожденную особую точку — седло линейно нулевого типа (матрица Якоби системы в этой точке нулевая) с шестью гиперболическими секторами.

Заметим также, что лемма 7 неверна при $a \neq 1/4$. Согласно замечанию 2 при $a \neq 1/4$ возможна ситуация, когда интегральные кривые системы (4) могут пересекать границу области R более одного раза.

Литература

1. Абиев Н. А. Об эволюции инвариантных римановых метрик на одном классе обобщенных пространств Уоллаха под влиянием нормализованного потока Риччи // Мат. тр. — 2017. — Т. 20, № 1. — С. 3–20.
2. Абиев Н. А., Арванитойоргос А., Никоноров Ю. Г., Сиасос П. Нормализованный поток Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха // Мат. форум. Т. 8, ч. 1. Исслед. по мат. анализу. — Владикавказ. — ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2014. — С. 25–42. — (Итоги науки. Юг России.)
3. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. — М.: Наука, 1966. — 568 с.
4. Валиев Ф. М. Точные оценки секционных кривизн однородных римановых метрик на пространствах Уоллаха // Сиб. мат. журн. — 1979. — Т. 20, № 2. — С. 248–262.
5. Вольпер Д. Е. Секционные кривизны диагонального семейства $Sp(n+1)$ -инвариантных метрик на $(4n+3)$ -мерных сферах // Сиб. мат. журн. — 1994. — Т. 35, № 6. — С. 1089–1100.
6. Вольпер Д. Е. Семейство метрик на 15-мерной сфере // Сиб. мат. журн. — 1997. — Т. 38, № 2. — С. 223–234.
7. Вольпер Д. Е. Секционные кривизны нестандартных метрик на \mathbf{CP}^{2n+1} // Сиб. мат. журн. — 1999. — Т. 40, № 1. — С. 39–45.
8. Ломшаков А. М., Никоноров Ю. Г., Фирсов Е. В. Инвариантные метрики Эйнштейна на три-локально-симметрических пространствах // Мат. тр. — 2003. — Т. 6, № 2. — С. 80–101.
9. Никоноров Ю. Г. Об одном классе однородных компактных многообразий Эйнштейна // Сиб. мат. журн. — 2000. — Т. 41, № 1. — С. 200–205.
10. Родионов Е. Д. Эйнштейновы метрики на четномерных однородных пространствах, допускающих однородную риманову метрику положительной секционной кривизны // Сиб. мат. журн. — 1991. — Т. 32, № 3. — С. 126–131.
11. Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonov Yu. G., Siasos P. The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces // Diff. Geom. Appl. — 2014. — Vol. 35. — P. 26–43.

12. Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G., Siasos P. The Ricci flow on some generalized Wallach spaces // *Geom. Appl. Springer Proc. Math. Statist.* — Switzerland: Springer, 2014. — Vol. 72. — P. 3–37.
13. Abiev N. A., Nikonorov Yu. G. The evolution of positively curved invariant Riemannian metrics on the Wallach spaces under the Ricci flow // *Ann. Glob. Anal. Geom.* — 2016. — Vol. 50, № 1. — P. 65–84.
14. Aloff S., Wallach N. An infinite family of 7-manifolds admitting positively curved Riemannian structures // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1975. — Vol. 81. — P. 93–97.
15. Bérard B. L. Les variétés riemanniennes homogènes simplement connexes de dimension impaire à courbure strictement positive // *J. Math. Pure. Appl.* — 1976. — Vol. 55. — P. 47–68.
16. Berger M. Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.* — 1961. — Vol. 15. — P. 191–240.
17. Besse A. L. *Einstein Manifolds.* — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1987. — 510 p.
18. Bettiol R. G., Krishnan A. Four-dimensional cohomogeneity one Ricci flow and nonnegative sectional curvature // *Comm. Anal. Geom.* — (to appear). arXiv:1606.00778v1.
19. Böhm C. On the long time behavior of homogeneous Ricci flows // *Comment. Math. Helv.* — 2015. — Vol. 90. — P. 543–571.
20. Böhm C., Lafuente R., Simon M. Optimal curvature estimates for homogeneous Ricci flows. arXiv: 1604.02625v1.
21. Böhm C., Wilking B. Nonnegatively curved manifolds with finite fundamental groups admit metrics with positive Ricci curvature // *Geom. Funct. Anal.* — 2007. — Vol. 17, № 3. — P. 665–681.
22. Buzano M. Ricci flow on homogeneous spaces with two isotropy summands // *Ann. Glob. Anal. Geom.* — 2014. — Vol. 45, № 1. — P. 25–45.
23. Chen Z., Kang Y., Liang K. Invariant Einstein metrics on three-locally-symmetric spaces // *Comm. Anal. Geom.* — 2016. — Vol. 24, № 4. — P. 769–792.
24. Cheung M. W., Wallach N. R. Ricci flow and curvature on the variety of flags on the two dimensional projective space over the complexes, quaternions and octonions // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 2015. — Vol. 143, № 1. — P. 369–378.
25. Dumortier F., Llibre J., Artes J. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems.* — Berlin: Springer-Verlag, 2006. — 298 p.
26. Hamilton R. S. Three-manifolds with positive Ricci curvature // *J. Diff. Geom.* — 1982. — Vol. 17. — P. 255–306.
27. Jablonski M. Homogeneous Ricci solitons // *J. Reine Angew. Math.* — 2015. — Vol. 699. — P. 159–182.
28. Lafuente R. Scalar curvature behavior of homogeneous Ricci flows // *J. Geom. Anal.* — 2014. — Vol. 25, № 4. — P. 2313–2322.
29. Lauret J. Ricci flow on homogeneous manifolds // *Math. Z.* — 2013. — Vol. 274, № 1–2. — P. 373–403.
30. Ni L. Ricci flow and manifolds with positive curvature // *Symmetry: Representation Theory and its Appl. Progress in Math.* — N. Y.: Birkhäuser/Springer, 2014. — Vol. 257. — P. 491–504.
31. Nikonorov Yu. G. Classification of generalized Wallach spaces // *Geom. Dedicata.* — 2016. — Vol. 181, № 1. — P. 193–212.
32. Nikonorov Yu. G., Rodionov E. D., Slavskii V. V. Geometry of homogeneous Riemannian manifolds // *J. Math. Sci.* — 2007. — Vol. 146, № 6. — P. 6313–6390.

33. *Payne T. L.* The Ricci flow for nilmanifolds // J. Mod. Dyn. — 2010. — Vol. 4, № 1. — P. 65–90.
34. *Prado R., Grama L.* Variational aspects of homogeneous geodesics on generalized flag manifolds and applications. arXiv: 1602.07660v1.
35. *Püttmann T.* Optimal pinching constants of odd dimensional homogeneous spaces // Invent. Math. — 1999. — Vol. 138, № 3. — P. 631–684.
36. *Shankar K.* Isometry groups of homogeneous, positively curved manifolds // Diff. Geom. Appl. — 2001. — Vol. 14. — P. 57–78.
37. *Verdiani L., Ziller W.* Positively curved homogeneous metrics on spheres // Math. Zeitschrift. — 2009. — Vol. 261. — P. 473–488.
38. *Wallach N. R.* Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature // Ann. Math. — 1972. — Vol. 96, № 2. — P. 277–295.
39. *Wilking B., Ziller W.* Revisiting homogeneous spaces with positive curvature // J. Reine Angew. Math. DOI: 10.1515/crelle-2015-0053.
40. *Xu M., Wolf J. A.* $Sp(2)/U(1)$ and a positive curvature problem // Diff. Geom. Appl. — 2015. — Vol. 42. — P. 115–124.

АБИЕВ НУРЛАН АБИЕВИЧ

Таразский государственный университет им. М.Х. Дулати

КАЗАХСТАН, 080000, Тараз, ул. Толе би, 60

E-mail: abiev@mail.ru

НИКОНОРОВ ЮРИЙ ГЕННАДЬЕВИЧ

Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН

РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: nikonorov2006@mail.ru

ON EVOLUTION OF POSITIVELY CURVED INVARIANT RIEMANNIAN METRICS ON THE WALLACH SPACES UNDER THE RICCI FLOW

Abiev N. A., Nikonorov Yu. G.

This paper is a survey of recent results on the evolution of positively curved metrics on the Wallach spaces $SU(3)/T_{\max}$, $Sp(3)/Sp(1) \times Sp(1) \times Sp(1)$, and $F_4/Spin(8)$. We discuss the fact that the normalized Ricci flow evolves all generic invariant Riemannian metrics with positive sectional curvature into metrics with mixed sectional curvature for all Wallach spaces and the fact that the normalized Ricci flow evolves all generic invariant Riemannian metrics with positive Ricci curvature into metrics with mixed Ricci curvature for the spaces $Sp(3)/Sp(1) \times Sp(1) \times Sp(1)$ and $F_4/Spin(8)$. We also discuss some results relating to more general homogeneous spaces.

Key words: Wallach space, generalized Wallach space, Riemannian metric, Ricci flow, sectional curvature, Ricci curvature, scalar curvature, planar dynamical system, singular point.

ГЛОБАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ НЕКОТОРОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. Б. Батхин

Рассматривается некоторое вещественное алгебраическое многообразие в \mathbb{R}^3 , особые точки которого играют важную роль в изучении нормализованного потока Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха. Описывается методика получения глобального параметрического представления этого многообразия с использованием методов теории исключений и методов компьютерной алгебры. Используется параметризация дискриминантного множества вещественного кубического многочлена.

Ключевые слова: алгебраическое многообразие, теория исключения, дискриминантное множество, особые точки.

1. Введение

В серии работ Ю. Г. Никонорова с соавторами (см., например, [1] и библиографию в ней) исследовалось трехпараметрическое семейство специальных однородных пространств с точки зрения нормализованного потока Риччи. Поток Риччи в этом случае задает эволюцию инвариантных (однородных) римановых метрик на рассматриваемых однородных пространствах Уоллаха. Уравнение нормализованного потока Риччи сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений с тремя параметрами a_1, a_2, a_3 , а особым точкам этой системы соответствуют инвариантные метрики Эйнштейна [2]. Здесь изучается множество Ω значений параметров a_1, a_2, a_3 , при которых упомянутая выше система имеет хотя бы одну вырожденную особую точку. Показано, что многообразие Ω описывается уравнением

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{a}) \stackrel{\text{def}}{=} & (2s_1 + 4s_3 - 1)(64s_1^5 - 64s_1^4 + 8s_1^3 + 240s_1^2s_3 - 1536s_1s_3^2 - \\ & - 4096s_3^3 + 12s_1^2 - 240s_1s_3 + 768s_3^2 - 6s_1 + 60s_3 + 1) - \\ & - 8s_1s_2(2s_1 + 4s_3 - 1)(2s_1 - 32s_3 - 1)(10s_1 + 32s_3 - 5) - \\ & - 16s_1^2s_2^2(52s_1^2 + 640s_1s_3 + 1024s_3^2 - 52s_1 - 320s_3 + 13) + \\ & + 64(2s_1 - 1)s_2^3(2s_1 - 32s_3 - 1) + 2048s_1(2s_1 - 1)s_2^4 = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где s_1, s_2, s_3 — элементарные симметрические многочлены, равные соответственно

$$s_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad s_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3, \quad s_3 = a_1a_2a_3. \quad (2)$$

В указанных выше работах была исследована особая точка $P_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. В [3] дано исследование всех особых точек порядков 1, 2, 3 многообразия Ω и показана его структура в целом. Приведено качественное описание всех компонентов многообразия Ω и их взаимного расположения. Основной акцент при исследовании был сделан на применении методов компьютерной алгебры. Данная работа предлагает метод получения глобальной параметризации многообразия Ω как в переменных \mathbf{s} , так и в переменных \mathbf{a} . Здесь и далее полужирным шрифтом обозначаем вектор из \mathbb{R}^3 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем *\mathbf{s} -представлением* многообразия Ω , если его аналитическое описание дано в переменных $s_i, i = 1, 2, 3$, и *\mathbf{a} -представлением* многообразия Ω , если — в переменных $a_i, i = 1, 2, 3$.

Вблизи каждой из особых точек многообразия Ω можно выполнить детальный локальный анализ и дать рациональную аппроксимацию всех компонентов многообразия методами, описанными в [4]. Однако глобальное параметрическое представление многообразия может быть существенно полезным во многих случаях, в частности для получения локального разложения многообразия и его визуализации.

Данная работа представляет собой сокращенный вариант препринта [5], где дано развернутое изложение метода. Пользуясь случаем, автор выражает благодарность профессору А. Д. Брюно за плодотворное обсуждение результатов работы.

2. Структура дискриминантного множества кубического многочлена

Переход от \mathbf{s} -представления к \mathbf{a} -представлению многообразия Ω задается преобразованием (2), каждый компонент которого представляется в виде $s_i = \sigma_i(\mathbf{a})$, где σ_i — элементарные симметрические многочлены [6, гл. 3, п. 11]: $\sigma_i(\mathbf{a}) = \sum_{k_1 < \dots < k_i} a_{k_1} \times \dots \times a_{k_i}$. В силу теоремы Виета переменные \mathbf{a} можно рассматривать как корни

некоторого вспомогательного кубического многочлена $\chi(y)$ с коэффициентами \mathbf{s} :

$$\chi(y) \stackrel{\text{def}}{=} y^3 - s_1 y^2 + s_2 y - s_3. \quad (3)$$

Очевидно, что выражение (1) задает \mathbf{s} -представление многообразия Ω в той части Π_1 пространства коэффициентов $\Pi \equiv \mathbb{R}^3$ многочлена (3), где последний имеет три вещественных корня. Как известно [7], все пространство Π вещественного многочлена степени n делится дискриминантным множеством на $1 + [\frac{n}{2}]$ областей с различным числом вещественных корней. Для кубического многочлена таких областей две. В области Π_1 многочлен (3) имеет три вещественных корня, в области Π_2 — один вещественный и два комплексно-сопряженных. Границей областей Π_1 и Π_2 служит дискриминантная поверхность

$$\mathcal{D}(\chi) = \{\mathbf{s} : D(\chi) = 0\},$$

где $D(\chi)$ — дискриминант многочлена $\chi(y)$.

Утверждение 1. Для того чтобы у многочлена $\chi(y)$ все корни были вещественными, необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты \mathbf{s} удовлетворяли неравенству $D(\chi) \geq 0$. Здесь

$$D(\chi) = -4s_1^3 s_3 + s_1^2 s_2^2 + 18s_1 s_2 s_3 - 4s_2^3 - 27s_3^2 \quad (4)$$

есть дискриминант многочлена (3).

В [8] показано, что дискриминантное множество \mathcal{D} произвольного вещественного многочлена допускает в пространстве его коэффициентов Π полиномиальную параметризацию. Для многочлена (3) она имеет вид

$$\mathcal{D}(\chi) : \{s_1 = 2t_1 + t_2, s_2 = t_1^2 + 2t_1 t_2, s_3 = t_1^2 t_2\}. \quad (5)$$

Это линейчатая развертывающаяся поверхность с огибающей множества прямых в виде однопараметрического семейства $\mathcal{D}^{(1)}(\chi)$ особых точек с параметризацией

$$\mathcal{D}^{(1)}(\chi) : \{s_1 = 3t_1, s_2 = 3t_1^2, s_3 = t_1^3\}. \quad (6)$$

Поверхность $\mathcal{D}(\chi)$ бирационально эквивалентна плоскости \mathbb{R}^2 . Кривая особых точек (6) в координатах (t_1, t_2) задает биссектрису первого и третьего квадрантов, ибо при $t_2 = t_1$ параметризация (5) переходит в параметризацию (6).

При каждом фиксированном значении параметра t_2 выражение (5) определяет параболу, которая имеет касание второго порядка с кривой особых точек при $t_1 = t_2$. Таким образом, на плоскости (t_1, t_2) прямые $t_1 = \text{const}$ соответствуют касательным к кривой (6), а прямые $t_2 = \text{const}$ соответствуют касательным параболом, замещающим всю дискриминантную поверхность. Тем самым дискриминантная поверхность $\mathcal{D}(\chi)$ образована двумя семействами образующих: семейством касательных прямых и семейством парабол, касающихся кривой особых точек.

3. Точки многообразия Ω на дискриминантной поверхности $\mathcal{D}(\chi)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\varphi(\mathbf{s})$ — некоторый многочлен. Точка $\mathbf{s} = \mathbf{s}^0$ множества $\varphi(\mathbf{s}) = 0$ называется *особой точкой k -го порядка*, если в этой точке обращаются в нуль все частные производные многочлена $\varphi(\mathbf{s})$ по s_1, \dots, s_3 до k -го порядка включительно и не обращается в нуль хотя бы одна частная производная порядка $k+1$.

Особые точки многообразия Ω в \mathbf{a} -представлении являются нулями идеала, образованного многочленом (1) и всеми его частными производными $\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{a}}$. Поскольку

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{a}} = \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{a}} \right)^T \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{s}},$$

то нужно определить особые точки многообразия Ω в \mathbf{s} -представлении и особые точки якобиана преобразования (2). Непосредственные вычисления показывают $D(\chi) = J^2$, где $J = \det \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{a}} = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_1 - a_3)$. Поэтому рассмотрим вначале общие точки многообразия Ω и дискриминантной поверхности $\mathcal{D}(\chi)$ в \mathbf{s} -представлении.

Воспользуемся параметризацией (6) и после подстановки ее в формулу (1) получим, что на кривой особых точек (6) $Q(\mathbf{s})$ факторизуется:

$$Q(\mathbf{s})|_{\mathcal{D}^{(1)}(\chi)} = -(2t_1 + 1)^4(4t_1 - 1)^8.$$

Нулям $t_1 = \frac{1}{4}$ и $t_1 = -\frac{1}{2}$ соответствуют особые точки $P_1^{(3)} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ и $P_2^{(3)} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ третьего порядка многообразия Ω в \mathbf{a} -представлении (см. [3, таблицы 1, 2]).

Подставляя параметризацию (5) в многочлен $Q(\mathbf{s})$, получим, что последний раскладывается на множители:

$$Q(\mathbf{s})|_{\mathcal{D}(\chi)} = -(1 + 2t_2) (8t_1t_2 + 8t_2^2 - 4t_1 - 4t_2 + 1) \times \\ \times (16t_1^3 + 16t_1^2t_2 - 4t_1 - 2t_2 + 1)^3. \quad (7)$$

Таким образом, многообразие Ω пересекается (касается) дискриминантной поверхности $\mathcal{D}(\chi)$ вдоль трех одномерных многообразий, каждое из которых в координатах (t_1, t_2) определяется нулями соответствующего множителя формулы (7). Обозначим эти многообразия через \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 и \mathcal{L}_3 соответственно (см. рис. 1).

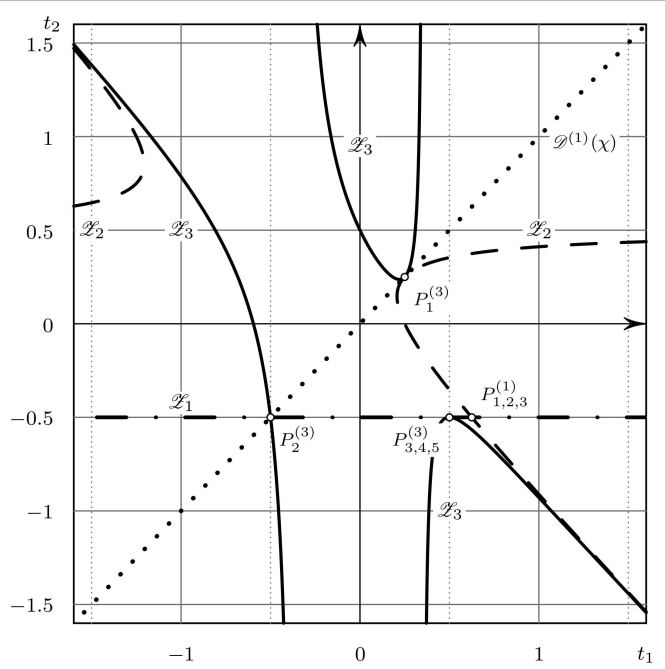


Рис. 1. Многообразия \mathcal{L}_i , $i = 1, 2, 3$, и кривая особых точек $\mathcal{D}^{(1)}(\chi)$ на плоскости (t_1, t_2) . Кружками показаны точки пересечения кривых.

Все три кривые допускают рациональную параметризацию и на плоскости (t_1, t_2) попарно пересекаются в четырех точках:

- \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 пересекаются в точке $(\frac{5}{8}, -\frac{1}{2})$;

- \mathcal{Z}_1 и \mathcal{Z}_3 пересекаются в точке $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, соответствующей точке $P_2^{(3)}$ на кривой (6), и касаются в точке $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, соответствующей точкам $P_{3,4,5}^{(3)}$;

- \mathcal{Z}_2 и \mathcal{Z}_3 касаются в точке $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, соответствующей точке $P_1^{(3)}$ на кривой (6).

Многообразия \mathcal{Z}_i , $i = 1, 2, 3$, с соответствующими точками пересечения показаны на рис. 1.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что вдоль многообразий \mathcal{Z}_1 и \mathcal{Z}_2 дискриминантная поверхность $\mathcal{D}(\chi)$ трансверсально пересекается с многообразием Ω , в то время как вдоль многообразия \mathcal{Z}_3 указанные выше поверхности пересекаются с касанием второго порядка. Поскольку нас интересует не все многообразие Ω , а только те его части, которые располагаются в области Π_1 , в которой $D(\chi) \geq 0$, то параметризацию Ω надо строить, начиная от многообразий \mathcal{Z}_i . Таким образом, ставится задача вычисления параметрического представления многообразия с краем.

Для построения глобальной параметризации многообразия Ω предлагается следующий подход:

- выберем одно из многообразий \mathcal{Z}_i и выполним такую замену переменных, чтобы новые координаты $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$ задавали отклонение от этого многообразия; пусть $\tilde{Q}_i(\mathbf{S}) = 0$ — уравнение многообразия Ω в новых переменных \mathbf{S} ;

- определим набор \mathbb{S} таких значений параметра $S_1 = \text{const}$, для которых кривая $\mathcal{F} : \{\tilde{Q}_i(S_1, S_2, S_3) = 0\}$ является приводимой, т. е. многочлен \tilde{Q}_i факторизуется на отдельные множители; такие значения параметра $S_1 \in \mathbb{S}$ назовем *критическими*, и для каждого из них нужно построить свою параметризацию;

- при каждом фиксированном значении параметра $S_1 = \text{const}$ многообразия \mathcal{Z}_i уравнение $\tilde{Q}_i(S_1, S_2, S_3) = 0$ задает некоторую неприводимую алгебраическую кривую \mathcal{F}_i , которая допускает параметризацию

$$\mathcal{F}_i : \{S_2 = \varphi(S_1, t), S_3 = \psi(S_1, t)\}; \quad (8)$$

- выполним такую замену параметра $t \rightarrow T$, чтобы при $T = 0$ вектор $(S_1, \varphi(S_1, 0), \psi(S_1, 0))$ параметризовал многообразие \mathcal{Z}_i ;

- полученную параметризацию (8), в которой параметр t заменен параметром T , подставим в формулу (4) и для каждого значения

параметра S_1 найдем интервал изменения параметра T , на котором выполняется неравенство $D(\chi)(S_1, T) \geq 0$ утверждения 1.

Таким образом, полученная параметризация для всех значений параметра S_1 , кроме некоторого конечного множества, задает параметрическое представление той части многообразия Ω в \mathbf{s} -представлении, на котором многочлен (3) имеет вещественные корни. Эта параметризация, дополненная параметризацией для критических значений, может быть использована для получения локального разложения Ω и его визуализации.

4. Параметризация вдоль многообразий \mathcal{Z}_i

В этом разделе построим глобальные параметризации многообразия Ω , следуя описанному выше подходу. Можно вычислять соответствующие параметризации Ω для каждого из многообразий \mathcal{Z}_i независимо, но такой подход связан с большим объемом вычислений и выглядит более трудоемким. Поэтому вначале построим параметризацию Ω с помощью многообразия \mathcal{Z}_1 , которое имеет более простую параметризацию в \mathbf{s} -представлении, а затем, используя его, получим параметризации, основанные на двух других многообразиях $\mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3$.

4.1. Параметризация с помощью многообразия \mathcal{Z}_1 . Многообразие \mathcal{Z}_1 имеет полиномиальную параметризацию

$$\mathcal{Z}_1 : \left\{ s_1 = 2t_1 - \frac{1}{2}, s_2 = t_1^2 - t_1, s_3 = -\frac{t_1^2}{2} \right\} \quad (9)$$

и реализуется при всех значениях переменной s_1 . Выполним следующую замену переменных:

$$s_2 = \frac{1}{4}S_2 + \frac{(2s_1 + 1)(2s_1 - 3)}{16}, \quad s_3 = \frac{1}{4}S_3 - \frac{(2s_1 + 1)^2}{32}, \quad (10)$$

выразив из формулы (9) для s_1 параметр t_1 и подставив его в два других выражения. Тогда в новых переменных (S_2, S_3) многочлен Q

имеет вид

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_1 \stackrel{\text{def}}{=} & 8s_1(2s_1-1)S_2^4 - 8(2s_1-1)S_2^3S_3 - 64s_1S_2S_3^2(s_1S_2-2S_3) - \\
& - 64S_3^4 + 2(2s_1-1)s_1(16s_1^2-14s_1-9)S_2^3 + \\
& + (64s_1^4-144s_1^3+168s_1^2+12s_1-18)S_2^2S_3 - \\
& - 16s_1(8s_1^3+4s_1^2-18s_1+15)S_2S_3^2 + \\
& + 16(3+2s_1)(4s_1^2-6s_1+3)S_3^3 + \\
& + s_1(160s_1^5-336s_1^4+24s_1^3+264s_1^2-84s_1-27)\frac{S_2^2}{2} + \\
& + \left(216s_1^4+96s_1^3-272s_1^5-300s_1^2+117s_1+128s_1^6+\frac{27}{2}\right)S_2S_3 + \\
& + (-64s_1^6-64s_1^5+320s_1^4-240s_1^3-48s_1^2+180s_1-81)S_3^2 + \\
& + s_1(3+2s_1)(4s_1-3)(2s_1-3)(2s_1-1)^4\frac{S_2}{8} + \\
& + (3+2s_1)(4s_1-3)(4s_1^2-4s_1+3)(2s_1-1)^4\frac{S_3}{8}.
\end{aligned} \tag{11}$$

В таком представлении очевидно, что существенная перестройка многообразия Ω происходит при значениях $s_1 \in \{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$. Непосредственная проверка показывает, что многочлен (11) факторизуется при значении $s_1 = 0$. Следовательно, множество \mathbb{S}_1 критических значений параметра s_1 , для которых следует строить специальные параметризации, есть $\mathbb{S}_1 = \{-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$. При каждом фиксированном $s_1 \notin \mathbb{S}_1$ кривая $\mathcal{F}_1 : \{\tilde{Q}_1(s_1, S_2, S_3) = 0\}$ неприводима и имеет род 0, следовательно, она допускает рациональную параметризацию:

$$\begin{aligned}
S_2 = & -T \left(T^3 + 4(4s_1^2+3)T^2 + 4s_1(8s_1^2-2s_1+3)T + \right. \\
& \left. + (2s_1+3)(2s_1-1)(4s_1^2-4s_1+3) \right) / \Delta, \\
S_3 = & -T \left(4T^3 - 4s_1(2s_1-5)T^2 - 2s_1(8s_1^2-18s_1+3)T - \right. \\
& \left. - s_1(2s_1+3)(2s_1-1)(2s_1-3) \right) / \Delta,
\end{aligned} \tag{12}$$

где знаменатель $\Delta = 4(4T^2 + (4s_1+6)T + 2s_1+3)(T+s_1)$. Подставляя выражение (12) в замену (10), получим параметризацию многообразия Ω в \mathbf{s} -представлении.

Параметризация (12) не работает для указанных выше критических значений s_1 , поскольку при этих значениях многочлен (11) уже не является неприводимым и факторизуется на отдельные множители, для каждого из которых следует строить свою параметризацию. Критические значения параметра s_1 легко определить, если вычислить дискриминанты числителей и знаменателя относительно параметра T в формуле (12) и найти их общие корни как многочленов от переменной s_1 .

Поскольку нас интересует только та часть многообразия Ω , на которой $D(\chi) \geq 0$, то при использовании указанной выше параметризации для каждого фиксированного значения параметра s_1 следует выбирать такое значение параметра T , чтобы выполнялось неравенство утверждения 1.

4.2. Параметризация с помощью многообразия \mathcal{X}_2 . Многообразие \mathcal{X}_2 имеет рациональную параметризацию

$$\mathcal{X}_2 : \left\{ s_1 = -\frac{u^2 + u + 1}{2u}, s_2 = \frac{1 - 4u^2(u + 1)^2}{4u}, \right. \\ \left. s_3 = \frac{(2u^2 + 2u + 1)^2(u + 1)}{32u^2} \right\}.$$

Применяя подход раздела 3, получим следующую параметризацию:

$$S_2 = -T \left(T^3 - (2u + 1)(2u^3 + 3)T^2 - (4u^7 + 12u^6 + 7u^5 - 12u^4 - 12u^3 - u^2 - 4u - 3)T + (u^2 - 1)(2u + 1)(2u^4 + 4u^3 + 2u + 1) \right) / \Delta_2,$$

$$S_3 = -T \left(T^3 + (2u + 3)(2u - 1)(u + 1)(u^2 + u + 1)T^2 + (u + 1)(u^2 + u + 1)(4u^5 + 8u^4 - 3u^3 - 13u^2 - 2u + 3)T - (u - 1)(2u + 1)(u^2 + u + 1)(2u^2 + 2u - 1)(u + 1)^2 \right) / (2\Delta_2).$$

Здесь $\Delta_2 = u^2(T - u^2 - u - 1)(T + (u^2 - 1))(T + (u - 1)(u + 1)^2)$.

Эта параметризация вместе с подстановкой

$$\left\{ s_1 = -\frac{u^2 + u + 1}{2u}, s_2 = S_2 - \frac{4u^2(u + 1)^2 - 1}{16u^2}, \right. \\ \left. s_3 = \frac{S_3}{2} + \frac{(2u^2 + 2u + 1)^2(u + 1)}{32u^2} \right\}$$

задают параметрическое представление многообразия Ω .

4.3. Параметризация многообразия Ω с помощью многообразия \mathcal{Z}_3 . Аналогично поступим, используя многообразие \mathcal{Z}_3 и его параметрическое представление. Опуская громоздкие вычисления, предъявим параметризацию переменных S_2, S_3 , задающих отклонение от многообразия \mathcal{Z}_3 :

$$\left\{ \begin{aligned} s_1 &= \frac{16u^3 - 1}{2(8u^2 - 1)}, \quad s_2 = \frac{S_2}{4} - \frac{u(8u^3 - 3u + 1)}{8u^2 - 1}, \\ s_3 &= \frac{S_3}{4} - \frac{u^2(16u^3 - 4u + 1)}{2(8u^2 - 1)} \end{aligned} \right\}.$$

Переменные S_2, S_3 имеют следующее параметрическое представление:

$$\begin{aligned} S_2 &= -T \left((8u^2 - 4u - 1)^2 T^3 - 256u^2 (4u^2 + u - 2) (8u^2 - 4u - 1) T^2 + \right. \\ &\quad \left. + 512u (256u^6 - 240u^4 - 56u^3 + 90u^2 - 3u - 2) T + \right. \\ &\quad \left. + 49152u^2 (2u + 1) (2u - 1) (4u - 1) \right) / \Delta_3, \\ S_3 &= -T \left((8u^2 - 4u - 1)^2 T^3 - 64u (4u^2 + u - 2) (8u^2 - 2u + 1) \times \right. \\ &\quad \times (8u^2 - 4u - 1) T^2 + 512u^2 (512u^6 - 480u^4 - 112u^3 + 216u^2 - 42u + 5) T + \\ &\quad \left. + 98304u^3 (2u + 1) (2u - 1) (4u - 1) \right) / \Delta_3, \end{aligned}$$

где знаменатель

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= 32 (8u^2 - 1) (T - 8) \left((8u^2 - 4u - 1) T^2 - \right. \\ &\quad \left. - 64u (u - 1) (2u + 1) T - 512u^2 (2u + 1) \right). \end{aligned}$$

5. Параметризация Ω в а-представлении

Для получения глобальной параметризации многообразия Ω^* в переменных $a_i, i = 1, 2, 3$, достаточно воспользоваться известными формулами корней кубического многочлена для т. н. «неприводимого случая» Кардано, которые называют тригонометрической формулой Виета (см., например, [9, § 119]).

Приведем вариант этих формул для многочлена $\chi(y)$. Вычисляем две вспомогательные величины

$$W = \frac{1}{9} (s_1^2 - 3s_2), \quad R = -\frac{1}{54} (2s_1^3 - 9s_1s_2 + 27s_3).$$

Поскольку нас интересует случай трех вещественных корней, то дискриминант $D(\chi) = W^3 - R^2 \geq 0$. Если $D(\chi) > 0$, то вычисляем величину

$$\varphi = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{R}{\sqrt{W^3}} \right).$$

Тогда три различных вещественных корня суть

$$y_1 = -2\sqrt{W} \cos \varphi + \frac{s_1}{3}, \quad y_{2,3} = -2\sqrt{W} \cos \left(\varphi \pm \frac{2}{3}\pi \right) + \frac{s_1}{3}. \quad (13)$$

Если $D(\chi) = 0$, то корни вычисляются по формулам

$$y_1 = -2R^{\frac{1}{3}} + \frac{s_1}{3}, \quad y_{1,2} = R^{\frac{1}{3}} + \frac{s_1}{3}. \quad (14)$$

Итоговая параметризация многообразия Ω в \mathbf{a} -представлении восстанавливается по формулам раздела 4 и приведенным выше формулам (13) и (14).

Литература

1. Abiev N. A., Nikonov Yu. G. The evolution of positively curved invariant Riemannian metrics on the Wallach spaces under the Ricci flow // *Annals of Global Analysis and Geometry*. — 2016. — Vol. 50, № 1. — P. 65–84.
2. Абиев Н. А., Арванитойоргос А., Никоноров Ю. Г., Сиасос П. Нормализованный поток Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха // *Мат. форум*. Т. 8, ч. 1. Исследования по мат. анализу. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. — С. 25–42. — (Итоги науки. Юг России.)
3. Батхин А. Б., Брюно А. Д. Исследование одной вещественной алгебраической поверхности // *Программирование*. — 2015. — № 2. — С. 7–17. Engl. transl.: *Batkhin A. B., Bruno A. D. Investigation of a real algebraic surface* // *Programming and Computer Software*. — 2015. — Vol. 41, № 2. — P. 74–83. DOI: 10.1134/S0361768815020036.
4. Брюно А. Д., Батхин А. Б. Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии // *Программирование*. — 2012. — № 2. — С. 12–30. Engl. transl.: *Bruno A. D., Batkhin A. B. Resolution of an algebraic singularity by Power Geometry algorithms* // *Programming and Computer Software*. — 2012. — Vol. 38, № 2. — P. 57–72. DOI: 10.1134/S036176881202003X.
5. Батхин А. Б. Глобальные параметризации одной вещественной алгебраической поверхности // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. — 2016. — № 71. — 24 с. DOI: 10.20948/prepr-2016-76.
6. Прасолов В. В. Многочлены. — М.: МЦНМО, 2014. — 336 с.
7. Мейман Н. Н. Некоторые задачи распределения нулей многочленов // *Успехи мат. наук*. — 1949. — Т. 4, № 6 (34). — С. 154–188.

8. Батхин А. Б. Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Программирование. — 2016. — Т. 42, № 2. — С. 8–21. Engl. transl.: *Batkhin A. B. Parameterization of the discriminant set of a polynomial* // Programming and Computer Software. — 2016. — Vol. 42, № 2. — P. 65–76. DOI: 10.1134/S0361768816020031.
9. Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры. — М.-Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1941. — 460 с.

БАТХИН АЛЕКСАНДР БОРИСОВИЧ
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша
РОССИЯ, 125047, Москва, Миусская пл., 4
E-mail: batkhin@gmail.com

GLOBAL PARAMETRIZATION OF A CERTAIN ALGEBRAIC SURFACE

Batkhin A. B.

A real algebraic variety playing an important role in the study of the normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces is considered. The method for constructing of the global parametric representation of this variety with the help of elimination theory and computer algebra methods is proposed. Parametrization of the discriminant set of a real cubic polynomial is used. Three different parametrizations of the variety are obtained, each of which can be used out of some critical values of parameters.

Key words: algebraic variety, elimination theory, discriminant set, singular point.

ВЫПУКЛЫЙ МНОГОГРАННИК В АСИМПТОТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

А. Д. Брюно

В работе предлагаются методы вычисления решений алгебраического уравнения от трех неизвестных вблизи особой точки. Эти методы суть: многогранник Ньютона, степенные преобразования, новые варианты теоремы о неявной функции и униформизация плоской алгебраической кривой. Изложение начинается с обзора известных методов вычисления решений алгебраического уравнения от двух неизвестных. Вводится многогранник Адамара.

Ключевые слова: выпуклый многогранник, грань, алгебраическое уравнение, униформизация.

1. Введение

Пусть задан многочлен $f(X)$ с вещественными или комплексными коэффициентами, где $X = (x_1, \dots, x_n)$. Требуется найти решения уравнения

$$f(X) = 0 \quad (1)$$

для $X \in \mathbb{R}^n$ или \mathbb{C}^n в виде либо функций $X = \Phi(\Xi)$ от параметров Ξ , либо набора асимптотических разложений по параметрам

$$X = \Phi_0(\Xi) + \Phi_1(\Xi) + \dots \quad (2)$$

При этом множество решений уравнения (1) образует алгебраическое многообразие \mathcal{F} и может состоять из нескольких компонент (ветвей) разных размерностей. Для каждой компоненты надо найти свое разложение (2).

Здесь опишем алгоритмы решения этой задачи и их компьютерную реализацию. Изложение проведем по возрастанию размерности n этой задачи.

2. Случай $n = 2$

Точка $X = X^0$, $f(X^0) = 0$, называется *простой* точкой кривой \mathcal{F} , если в ней вектор $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2})$ не нулевой. В противном случае точка X^0 называется *особой* или *критической*. Сдвигом перенесем точку X^0 в начало координат.

2.1. Локальный анализ простой точки.

Теорема 1 (Коши [1]). Если при $X^0 = 0$ производная $\frac{\partial f}{\partial x_2} \neq 0$, то все решения уравнения (1) вблизи точки $X^0 = 0$ разлагаются в ряд

$$x_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k,$$

где b_k — постоянные.

2.2. Локальный анализ особой точки $X^0 = 0$ [2, гл. 1, § 2], [3, гл. 2]. Запишем многочлен $f(X)$ в виде

$$f(X) = \sum_{Q \geq 0} a_Q X^Q, \quad Q \in \mathbb{Z}^n, \quad (3)$$

где $X = (x_1, x_2)$, $Q = (q_1, q_2)$, $X^Q = x_1^{q_1} x_2^{q_2}$, a_Q — постоянные. Пусть $\mathbf{S}(f) = \{Q : a_Q \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Множество \mathbf{S} называется *носителем* (*support*) многочлена $f(X)$. Пусть оно состоит из точек Q_1, \dots, Q_k . Выпуклая оболочка носителя $\mathbf{S}(f)$ — это множество

$$\mathbf{N}(f) = \left\{ Q = \sum_{j=1}^k \mu_j Q_j, \mu_j \geq 0, \sum_{j=1}^k \mu_j = 1 \right\},$$

которое называется *многоугольником Ньютона*. Граница $\partial \mathbf{N}(f)$ состоит из вершин $\Gamma_i^{(0)}$ и ребер $\Gamma_i^{(1)}$, где i — это номер.

Каждому ребру $\Gamma_i^{(1)}$ соответствуют его граничное подмножество $\mathbf{S}_i^{(1)} = \mathbf{S} \cap \Gamma_i^{(1)}$, укороченный многочлен

$$\hat{f}_i^{(1)}(X) = \sum_{Q \in \mathbf{S}_i^{(1)}} a_i X^Q$$

и свой нормальный конус

$$\mathbf{U}_i^{(1)} = \left\{ P : \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q'' \rangle > \langle P, Q''' \rangle, Q', Q'' \in \Gamma_i^{(1)}, Q''' \in \Gamma \setminus \Gamma_i^{(1)} \right\},$$

где $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_*^2$, а плоскость \mathbb{R}_*^2 сопряжена плоскости \mathbb{R}^2 .

Лемма 1 [2, гл. 1, § 2]. Вблизи особой точки $X^0 = 0$ все решения уравнения $f(X) = 0$ образуют ветви вида

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} \tau^{r_{ik}}, \quad i = 1, 2, \tau \rightarrow \infty, r_{ik} > r_{ik+1}, \quad (4)$$

и каждый вектор $R_1 = (r_{11}, r_{21})$ принадлежит одному из нормальных конусов $\mathbf{U}_i^{(1)}$, лежащих в третьем квадранте плоскости \mathbb{R}_*^2 , т. е. $p_1, p_2 < 0$.

Из этой леммы следует, что в разложениях (4) отношения $\frac{r_{ik}}{r_{i1}}$, $i = 1, 2$, — рациональные числа. Более того, при правильной параметризации все числа r_{ik} — целые.

Аналогично устроены ветви кривой (1) вблизи точки $X^0 = (\infty, \infty)$, только там надо ограничиться ребрами $\Gamma_i^{(1)}$ с нормальными конусами $\mathbf{U}_i^{(1)}$, лежащими в первом квадранте плоскости \mathbb{R}_*^2 , т. е. $p_1, p_2 > 0$. Наконец, также устроены ветви кривой (1) вблизи точки $X^0 = (0, \infty)$, только там нормальные конусы $\mathbf{U}_i^{(1)}$ лежат во втором квадранте (в конусе задачи), т. е. $p_1 < 0, p_2 > 0$.

2.3. Степенное преобразование. Теперь заметим, что степенное преобразование

$$\begin{pmatrix} \ln x_1 \\ \ln x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $\alpha = (\alpha_{ij})$ — неособая квадратная (2×2) матрица с вещественными элементами α_{ij} , индуцирует аффинное преобразование в плоскостях \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}_*^2 :

$$\tilde{Q}^* = \alpha^* Q^*, \quad \tilde{P}^* = \alpha^{-1} P^*,$$

где звездочка означает транспонирование. При этом $\langle \tilde{P}, \tilde{Q} \rangle = \langle P, Q \rangle$ и моном X^Q переходит в моном $Y^{\tilde{Q}}$.

В дальнейшем можно ограничиться только унимодулярными матрицами $\alpha = (\alpha_{ij})$, т. е. α_{ij} — целые и $\det \alpha = \pm 1$.

Лемма 2 [2, гл. 1, § 2]. Для каждого ребра $\Gamma_j^{(1)}$ существует степенное преобразование (5) с унимодулярной матрицей α , которое переводит многочлен $f(X)$ в многочлен $g(Y)$. При этом ребру $\Gamma_i^{(1)} \subset \partial \mathbf{N}(f)$ соответствует вертикальное ребро $\tilde{\Gamma}_i^{(1)} \subset \partial \mathbf{N}(g)$.

Теперь для вычисления разложений, соответствующих ребру $\Gamma_i^{(1)}$, надо найти ненулевые корни $y_2 = y_2^0$ уравнения $y_1^q \tilde{g}_i(y_2) = 0$, где $y_1^q \tilde{g}_i(y_2)$ — укорочение многочлена $g(y_1, y_2)$, соответствующее вертикальному ребру $\tilde{\Gamma}_i^{(1)}$. Пусть $y_2^0 \neq 0$ — такой корень. Если он прост, то теорема 1 о неявной функции дает разложение ветви, проходящей через точку $y_1 = 0, y_2 = y_2^0$. Если y_2^0 — кратный корень многочлена $\tilde{g}_i(y_2)$, то делаем сдвиг $y_2 = y_2^0 + z_2$ и исследуем окрестность точки $y_1 = z_2 = 0$ тем же способом. Так получаются все ветви исходной кривой.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим лист Декарта

$$f(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 = 0. \quad (6)$$

Его носитель состоит из точек $(3, 0)$, $(0, 3)$ и $(1, 1)$. Их выпуклая оболочка — треугольник с этими вершинами (рис. 1).

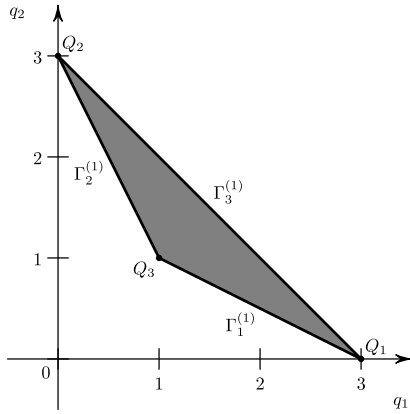


Рис. 1. Носитель и многоугольник Ньютона листа Декарта (6).

1. Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствует укороченный многочлен $\check{f}_1^{(1)}(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2$ и ветвь $x_2 = \frac{1}{3}x_1^2 + \varphi(x_1)$.

2. Ребру $\Gamma_2^{(1)}$ соответствует укорочение $\check{f}_2^{(1)}(x_1, x_2) = x_2^3 - 3x_1x_2$ и ветвь $x_1 = \frac{1}{3}x_2^2 + \varphi(x_2)$. Обе эти ветви пересекаются в особой точке $X^0 = 0$.

3. Ребру $\Gamma_3^{(1)}$ соответствует укорочение $\check{f}_3^{(1)}(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$ и ветвь $x_2 = -x_1 - 1 + \dots$ в бесконечности (рис. 1).

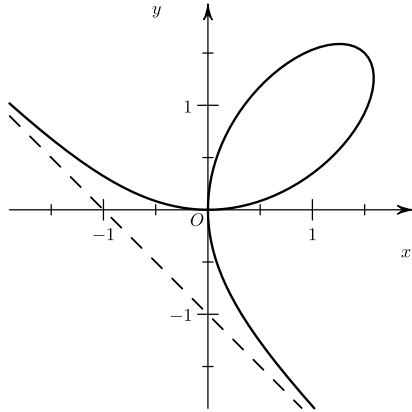


Рис. 2. Лист Декарта. Пунктиром показана асимптота.

2.4. Глобальный анализ плоской кривой. Предположим сначала, что многочлен $f(X)$ не распадается на множители. Тогда его корневое множество \mathcal{F} — это плоская алгебраическая кривая. Она имеет целочисленный топологический инвариант — род $g \geq 0$, $g \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим ситуации для различных значений g .

0) Случай $g = 0$. Тогда кривая \mathcal{F} бирационально эквивалентна прямой. Т. е. существует параметризация

$$x_1 = \varphi(t), \quad x_2 = \psi(t), \quad t = \eta(x_1, x_2),$$

где φ, ψ, η — рациональные функции своих аргументов.

ПРИМЕР 2. Для листа Декарта (6) имеем параметризацию

$$x_1 = \frac{3t}{1+t^3}, \quad x_2 = \frac{3t^2}{1+t^3}, \quad t = \frac{x_2}{x_1}.$$

1) Случай $g = 1$ [4]. Тогда кривая $f(X) = 0$ называется *эллиптической*. Посредством бирациональной замены $x_1, x_2 \leftrightarrow y_1, y_2$ она приводится к нормальной форме Вейерштрасса

$$y_2^2 = 4y_1^3 - g_2 y_1 - g_3, \quad (7)$$

где g_2 и g_3 — постоянные (модули). Униформизацию кривой (7) дает функция Вейерштрасса $\wp(t)$, которая является решением дифференциального уравнения

$$[\wp'(t)]^2 = 4\wp^3(t) - g_2\wp(t) - g_3,$$

где $\wp' = \frac{d\wp(t)}{dt}$, $g_2, g_3 = \text{const}$, и вблизи $t = 0$

$$\wp(t) = \frac{1}{t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{2k}, \quad b_k = \text{const}.$$

Итак, получаем униформизацию

$$y_1 = \wp(t), \quad y_2 = \wp'(t).$$

2) Гиперэллиптический случай с $g > 1$ [4, гл. 13]. В этом случае с помощью бирационального преобразования $x_1, x_2 \leftrightarrow y_1, y_2$ уравнение кривой приводится к нормальной форме

$$y_2^2 = R(y_1),$$

где $R(y_1)$ — многочлен степени $2g + 1$ без кратных корней. Решения этого уравнения можно записать в виде $y_1 = \varphi(t)$, $y_2 = \psi(t)$, где автоморфные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определенным образом выражаются через тета-функции. Если $g = 2$, то кривая всегда является гиперэллиптической (см. примеры в [5–12]), но при $g > 2$ существуют не гиперэллиптические кривые [13, гл. 7].

3) Суперэллиптический случай с $g > 2$. В этом случае бирациональной заменой координат уравнение приводится к нормальной форме

$$y_2^m = R(y_1),$$

где натуральное $m \geq 3$, а $R(y_1)$ — многочлен. Здесь также существует униформизация через тета-функции. Но как ее находить, пока неясно [14, 15]. По-видимому, существуют кривые, которые не являются суперэллиптическими. Но для них пока нет нормальной формы.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим кривую Ферма

$$x^n + y^n = 1.$$

Ее род $g = \frac{n(n-3)}{2} + 1$. Эти значения приведены в таблице 1.

Таблица 1

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g	0	1	3	6	10	15	21	28	36

Только при $n = 2$ эта кривая рациональна.

4) Общий случай. Для произвольной кривой $f(x, y) = 0$ известна только теорема о существовании ее глобальной униформизации $x_1 = \varphi(t)$, $x_2 = \psi(t)$, но нет аналитического алгоритма ее вычисления. Более того, даже для гиперэллиптических кривых такая униформизация находится преимущественно в случаях наличия дополнительных симметрий [5–10].

Впрочем, это неудивительно. Ведь даже для уравнения $f(x_1) = 0$ от одной неизвестной в общем случае нет аналитического алгоритма вычисления его корней. Имеется только аналитический алгоритм для вычисления приближенных значений этих корней, а их уточнение надо производить численно.

В [20] предложен алгоритм униформизации алгебраической кривой с помощью радикалов. В частности, он позволяет найти униформизации кривых рода $g \leq 4$, а также некоторых специальных кривых с $g > 4$. Например, для эллиптической кривой (7) униформизация в радикалах — это $y_1 = t$, $y_2 = \sqrt{4t^3 - g_1t - g_3}$.

2.5. Имплементация. Все локальные вычисления пунктов 2.1 и 2.2 имеются в системе компьютерной алгебры **Maple**. Для пункта 2.3 с помощью пакета **algcures** можно вычислить род кривой g . Если $g = 0$ или 1, то можно найти соответствующую бирациональную замену координат кривой к прямой или к нормальной форме. Если $g > 2$, то можно выяснить, является ли кривая гиперэллиптической или нет. Для гиперэллиптической кривой можно найти бирациональное преобразование к нормальной форме, алгоритма поиска униформизации там нет. Вопросы, связанные с суперэллиптическими кривыми, в **Maple** не рассматриваются [16].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогичным методом можно находить приближенные значения корней одного многочлена $f(x) = \sum a_k x^k$ от одной неизвестной. Для этого строится выпуклая оболочка \mathbf{H} точек $\check{Q}_k = (k, \ln |a_k|)$ на плоскости. Ребра ее границы $\partial \mathbf{H}$ дают укороченные многочлены $\check{f}_i(x)$, корни которых являются приближениями к корням исходного многочлена. Верхняя часть границы $\partial \mathbf{H}$ — это ломаная Адамара (J. Hadamard, 1893) [2, гл. 4, § 2, п. 2.1], [17].

ПРИМЕР 4. Рассмотрим многочлен $f(x) = ax + bx^3 + cx^5$. Если $|ac| < |b|^2$, то многочлен $f(x)$ имеет 2 укорочения: $\check{f}_1(x) = ax + bx^3$ и $\check{f}_2(x) = bx^3 + cx^5$ (рис. 3). Если $|ac| > |b|^2$, то $f(x)$ имеет только одно укорочение $\check{f}_3 = ax + cx^5$ (рис. 4).

Корни \tilde{x}^0 многочленов \check{f}_1 , \check{f}_2 и \check{f}_3 приближают корни x^0 исходного многочлена f . Дальнейшее приближение ε корня $x^0 + \varepsilon$ можно искать методом Ньютона из уравнения $f(x^0) + \varepsilon f'(x^0) = 0$ и т. д.

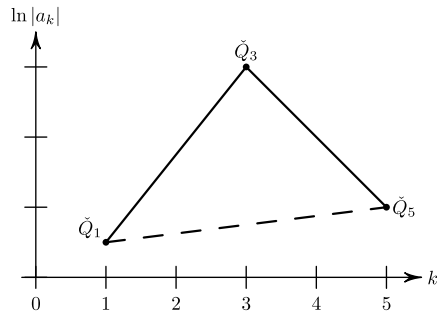


Рис. 3. Супернормаль и ломаная Адамара при $|ac| < |b|^2$.

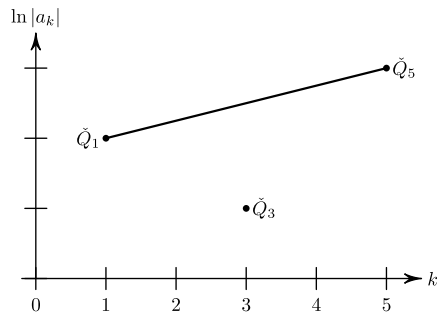


Рис. 4. Супернормаль и ломаная Адамара при $|ac| > |b|^2$.

ПРИМЕР 5. С помощью ломаной Адамара найдем приближенные значения корней многочлена

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^7 a_k x^k.$$

Значения его коэффициентов a_k приведены во второй строке таблицы 2. В третьей строке даны значения $\alpha_k = \ln |a_k|$. На рис. 5 показаны точки (k, α_k) и их огибающая — ломаная Адамара $\partial \mathbf{H}$. Для всех k ,

кроме $k = 2$ и $k = 5$, эти точки являются вершинами ломаной $\partial\mathbf{H}$. Пары соседних вершин (k, α_k) и (l, α_l) , $k < l$, соответствует укороченный многочлен $f_k(x) = a_k x^k + a_l x^l$. Его ненулевые корни обозначим через x_{k+1} , если $l = k+1$, или через x_{k+1}, x_{k+2} , если $l = k+2$. Их значения приведены в четвертой строке таблицы 2. В каждой из этих строчек вычислены значения $f(x_k)$ и $f'(x_k)$. Вычисленные по методу Ньютона поправки $\varepsilon_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ к потенциальным корням x_k приведены в пятой строке таблицы 2. Для $k < 6$ модули поправок $\varepsilon_k < 0.5$, а для $k = 6$ и 7 эти модули больше 1.5. Поэтому значения x_6 и x_7 требуют уточнения. Они получены из укороченных многочленов, содержащих $a_4 x^4$, $a_6 x^6$ и $a_7 x^7$. Поэтому в качестве приближенного к $f(x)$ рассмотрим многочлен $g = \sum_{k=4}^7 a_k x^k$, т. е. многочлен третьей степени $h = x^{-4}g$. Для него значение x_5 является приближенным корнем. Более точным является значение $x = 4$. Деля многочлен h на $x - 4$, получаем

$$3x^2 + 63x + 256 \quad (8)$$

и -2 в остатке. Корни \tilde{x}_6 и \tilde{x}_7 многочлена (8) равны $-10.5 + 2.9i$ и $-10.5 - 2.9i$ соответственно. Они приведены в шестой строке таблицы 2. Соответствующие поправки $\tilde{\varepsilon}_k = -\frac{f(\tilde{x}_k)}{f'(\tilde{x}_k)}$ приведены в седьмой строке. В восьмой строке приведены уточненные значения $x_k + \varepsilon_k$ для $k < 6$ и $\tilde{x}_k + \tilde{\varepsilon}_k$ для $k = 6, 7$. Наконец, в девятой строке приведены точные значения x_k^0 корней. Полученные приближенные значения корней многочлена $f(x)$ пригодны для уточнения по методу Ньютона.

Таблица 2

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_k	-4320	-9336	-4972	-3754	-1426	104	51	3
α_k	8.371	9.142	8.511	8.230	7.262	4.644	3.932	1.098
x_k		-.4627	1.577i	-1.577i	-2.633	5.288	-5.288	-17
ε_k		-.1157	.0439	.0439	.36	-.032	1.82	1.78
			-.0633i	+.0633i				
\tilde{x}_k							-10.5 +2.9i	-10.5 -2.9i
$\tilde{\varepsilon}_k$							-.578 +.762i	-.578 -.762i
$x_k + \varepsilon_k$		-.5784	.0439+ 1.514i	.0439+ -1.514i	-2.2725	5.2558	-9.922 +2.138i	-9.922 -2.138i
x_k^0		-.5819	.0519+ 1.5148i	.0519- 1.5148i	-2.0984	5.2551	-9.8393 +.931i	-9.8393 -.931i

В целом метод ломаной Адамара состоит в том, что исходный многочлен заменяется набором более простых многочленов, корни которых вычисляются просто и дают такие приближения корней исходного многочлена, которые достаточно хороши для численного уточнения по методу Ньютона.

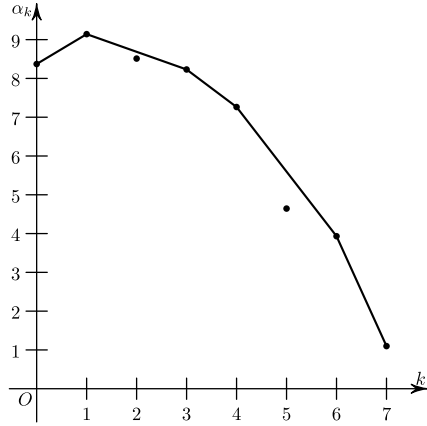


Рис. 5. Ломаная Адамара многочлена $f(x)$ примера 5.

3. Модифицированные теоремы о неявной функции для $n = 3$

Теорема 2 (Коши [1]). Пусть при $X^0 = 0$ имеем $f(X) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial x_3} \neq 0$, тогда вблизи точки $X = X^0$ все решения уравнения $f(X) = 0$ имеют вид

$$x_3 = \sum b_{Q'} X'^{Q'}, \quad (9)$$

где $X' = (x_1, x_2)$, $Q' = (q_1, q_2)$, $b_{Q'} = \text{const}$.

Теорема 3 [18, 19]. Пусть

$$f(X) = \sum a_Q X^Q, \quad (10)$$

где $a_Q = \text{const}$,

$$q_1 - \lambda_1 q_2 < 0, \quad q_1 - \lambda_2 q_2 < 0, \quad 0 \leq Q \in \mathbb{Z}^3, \quad \lambda_1, \lambda_2 = \text{const} \quad (11)$$

и $a_{(0,0,1)} = \frac{\partial f}{\partial x_3}|_{X=0} \neq 0$. Тогда решение уравнения $f(X) = 0$ имеет вид (9), где $b_{Q'} = \text{const}$ и выполнены неравенства (11); такое решение единственно.

Теорема 4 [3, гл. 2, § 1, теорема 1.1]. Пусть

$$f(X) = \sum a_{q_2 q_3}(x_1) x_2^{q_2} x_3^{q_3},$$

где сумма конечна, $0 \leq q_2, q_3 \in \mathbb{Z}$, а $a_{q_2 q_3}(x_1)$ — некоторые функции от x_1 , кроме того, $a_{00}(x_1) \equiv 0$, $a_{10}(x_1) \neq 0$. Тогда решение уравнения $f(X) = 0$ имеет вид

$$x_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x_1) x_3^k, \quad (12)$$

где коэффициенты b_k — функции от x_1 , являющиеся многочленами от $a_{q_2 q_3}(x_1)$ с $q_2 + q_3 \leq k$, деленными на a_{10}^{2k-1} . Такое разложение единственно.

В русском издании книги [3] имеется опечатка в формулировке этой теоремы. Она исправлена в ее английском издании. Кроме того, в [3] она сформулирована вблизи точки $X = 0$, но она справедлива вблизи оси x_1 , т. е. прямой $x_2 = x_3 = 0$.

Имплементация имеется только для теорем 2 и 3 в Maple и в [18].

4. Локальный анализ для $n = 3$

Точка $X = X^0$, $f(X^0) = 0$ называется *простой*, если в ней вектор $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3})$ — не нулевой. В противном случае точка $X = X^0$ называется *особой* или *критической*. Сдвигом $X = X^0 + \tilde{X}$ перенесем точку X^0 в начало координат. Если в этой точке производная $\frac{\partial f}{\partial x_3} \neq 0$, то согласно теореме 2 о неявной функции вблизи X^0 все решения уравнения $f(X) = 0$ имеют вид (9).

4.1. Многогранник Ньютона. Пусть точка $X^0 = 0$ — особая. Записываем многочлен в виде $f(X) = \sum a_Q X^Q$ (см. (3)) с $n = 3$ и строим его носитель $\mathbf{S} = \{Q : a_Q \neq 0\}$, многогранник Ньютона \mathbf{N} как выпуклую оболочку носителя, находим его границу $\partial \mathbf{N}$ и ее обобщенные грани $\Gamma_j^{(d)}$, т. е. вершины с $d = 0$, ребра с $d = 1$ и обычные грани с $d = 2$. Для каждой из них вычисляем граничное множество $\mathbf{S}_j^{(d)} = \mathbf{S} \cap \Gamma_j^{(d)}$, укороченный многочлен

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = \sum_{Q \in \mathbf{S}_j^{(d)}} a_Q X^Q$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$ в сопряженном пространстве \mathbb{R}_*^3 . При $X \rightarrow 0$ решения полного уравнения стремятся к нетривиальным решениям тех укороченных уравнений

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = 0,$$

у которых нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$ пересекается с отрицательным октантом $P \leq 0$ в \mathbb{R}_*^3 . Для вершины $\Gamma_j^{(0)}$ укороченная сумма $\hat{f}_j^{(0)}$ состоит из одного слагаемого. Такие укорочения нам неинтересны и в дальнейшем не рассматриваются. Будем рассматривать лишь укорочения, т. е. укороченные суммы, соответствующие ребрам $\Gamma_j^{(1)}$ и граням $\Gamma_j^{(2)}$.

4.2. Степенные преобразования [18]. Введем степенные преобразования

$$\ln X = \alpha \ln Y, \quad (13)$$

где $\ln X = (\ln x_1, \ln x_2, \ln x_3)^*$, $\ln Y = (\ln y_1, \ln y_2, \ln y_3)^*$, α — невырожденная квадратная (3×3) матрица (α_{ij}) с рациональными элементами α_{ij} (зачастую они будут целыми). При степенном преобразовании (13) моном X^Q переходит в моном $Y^{\tilde{Q}}$, где $\tilde{Q}^* = \alpha^* Q^*$.

Степенное преобразование (13) в двойственном пространстве \mathbb{R}_*^3 индуцирует линейное преобразование $\tilde{P}^* = \alpha^{-1} P^*$. Матрица B называется *унимодулярной*, если все ее элементы целые и $\det B = \pm 1$. Очевидно, для унимодулярной матрицы B обратная матрица B^{-1} также унимодулярна.

Теорема 5 [18, теорема 2]. Для грани $\Gamma_j^{(d)}$ существует степенное преобразование (13) с унимодулярной матрицей α , которое переводит укороченную сумму $\hat{f}_j^{(d)}(X)$ в сумму от d координат, т. е.

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = Y^R h(Y),$$

где $h(Y) = h(y_1)$, если $d = 1$, и $h(Y) = h(y_1, y_2)$, если $d = 2$. Здесь $R = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$. При этом дополнительные координаты y_2 , y_3 при $d = 1$ и y_3 при $d = 2$ являются локальными, и для многочлена $\hat{f}_j^{(d)}(X)$ сумма $h(Y)$ также будет многочленом.

Умножению многочлена $f(X)$ на X^P соответствует параллельный перенос носителя $\mathbf{S}(f)$ и многогранника $\Gamma(f)$ на вектор P . Поэтому если после степенного преобразования (13), примененного к

многочлену $f(X)$, получаем конечную сумму $g(Y)$, содержащую отрицательные степени координат y_1 , y_2 или y_3 , то существует такой вектор P , что произведение $Y^P g(Y)$ является многочленом, т. е. все показатели степени его мономов неотрицательны.

Структура решений полного уравнения, стремящихся к решениям укороченного уравнения, определяется размерностью d соответствующей обобщенной грани. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

4.3. Случай ребра, т. е. $d = 1$ [18]. В этом случае по теореме 5 существует степенное преобразование и сокращение, приводящее многочлен $f(X)$ к виду (10), (11). При этом образ ребра $\Gamma_j^{(1)}$ находится на оси q_3 , т. е. $q_1 = q_2 = 0$. Соответствующее укорочение является многочленом $h(y_3)$. Пусть $y_3 = y_3^0$ — его корень. Если это простой корень, то применима теорема 3, которая дает решение полного уравнения $f(X) = 0$ в виде

$$y_3 = \sum b_{Q'} Y'^{Q'}, \quad Q' = (q_1, q_2),$$

с неравенствами $q_1 - \lambda_1 q_2 < 0$, $q_1 - \lambda_2 q_2 < 0$.

Если y_3^0 — кратный корень, то сдвигом $y_3 = y_3^0 + \tilde{y}_3$ переводим его в начало координат; получаем новый многочлен $g(y_1, y_2, \tilde{y}_3)$ и ищем его корни с помощью построения многогранника Ньютона, как описано выше.

4.4. Случай грани, т. е. $d = 2$. В этом случае согласно теореме 5 с помощью степенного преобразования и сокращения приводим многочлен $f(X)$ к виду $g(Y)$, где $g(Y) = h(y_1, y_2)$ при $y_3 = 0$. Уравнение $h(y_1, y_2) = 0$ определяет плоскую алгебраическую кривую. Пусть $\tilde{h}(y_1, y_2)$ — неприводимый сомножитель многочлена $h(y_1, y_2)$ и \mathfrak{g} — род соответствующей кривой. Дальнейший анализ зависит от числа \mathfrak{g} .

0) Случай $\mathfrak{g} = 0$. Тогда существует бирациональная параметризация $y_1 = \varphi(t)$, $y_2 = \psi(t)$ и $t = \eta(y_1, y_2)$. Делаем бирациональную замену координат:

$$y_1 = \varphi(t) + \beta_1 z, \quad y_2 = \psi(t) + \beta_2 z, \quad (14)$$

где β_1 и β_2 — такие постоянные, что $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$. Тогда многочлен $\tilde{h}(y_1, y_2)$ переходит в многочлен $H(t, z)$, который при $z = 0$ тождественно равен нулю, а его производная $\frac{\partial H}{\partial z} \neq 0$ при $z = 0$. При замене (14) во всем многочлене $g(Y)$ он переходит в многочлен $G(Z)$,

где $z_1 = t$, $z_2 = z$, $z_3 = y_3$. Если $\tilde{h}(y_1, y_2)$ — простой множитель многочлена $h(y_1, y_2)$, то применяем теорему 4 и получаем ветвь вида (12):

$$z_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z_1) z_3^k, \quad (15)$$

где $b_k(z_1)$ — рациональные функции.

ПРИМЕР 6 (продолжение примера 2). В многочлене $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ сделаем подстановку

$$x_1 = \frac{3t}{1+t^3} + 3z, \quad x_2 = \frac{3t^2}{1+t^3}. \quad (16)$$

После умножения на общий знаменатель получим многочлен

$$\tilde{f}(t, z) = (1+t^3)^2 z^3 + 3z^2 t(1+t^3) + zt^2(2-t^3),$$

у которого прямая $z = 0$ является корнем. На этой прямой

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} = t^2(2-t^3) \neq 0.$$

Эта производная обращается в ноль при $t_0 = 0$ (что соответствует двойной точке $x_1 = x_2 = 0$, ей же соответствует $t = \infty$) и при $t_1 = \sqrt[3]{2}$. В этой последней точке $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$ на $f = 0$. Точку t_1 можно убрать, если вместо (16) сделать замену с другим набором чисел β_1, β_2 в (15). Но тогда получится другая точка $t_2 \neq 0, \infty$, где $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} = 0$ при $z = 0$.

Если $\tilde{h}(y_1, y_2)$ — кратный множитель в $h(y_1, y_2)$, то после замены (15) надо для полученного многочлена снова строить многогранник Ньютона и т. д. Аналогично для каждой из особых точек многочлена $h(y_1, y_2)$: надо сдвигать ее в начало координат по y_1, y_2 и строить многогранник Ньютона. Примеры таких вычислений см. в [18].

1) Случай $g = 1$. Сначала бирациональной заменой $y_1, y_2 \leftrightarrow z_1, z_2$ приводим многочлен $\tilde{h}(y_1, y_2)$ к нормальной форме Вейерштрасса $H(z_1, z_2)$. Затем, используя функцию Вейерштрасса $\wp(t)$ и ее производную $\wp'(t)$, делаем подстановку

$$z_1 = \wp(t) + \beta_1 u, \quad z_2 = \wp'(t) + \beta_2 u$$

с $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ и получаем многочлен $\tilde{g}(\wp(t), \wp'(t), u)$ такой, что $\tilde{g}(\wp(t), \wp'(t), 0) = 0$ и $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial u} \neq 0$ на $u = 0$.

Поэтому делаем эти замены в полном многочлене $g(Y)$ и получаем многочлен $G(\wp(t), \wp'(t), u, z_3)$, где $G = 0$, $\frac{\partial G}{\partial u} \neq 0$ при $u = z_3 = 0$. Если \tilde{h} — простой множитель многочлена h , то применима теорема 4. При этом получаем разложение (15) для поверхности, коэффициенты которого b_k являются рациональными функциями от $\wp(t)$ и $\wp'(t)$.

Если \tilde{h} — кратный множитель в h , то для $g(Y)$ строим многоугольник Ньютона по y_2 и y_3 .

Особые точки многочлена $h(Y)$ выделяются и исследуются отдельно через многогранники Ньютона.

2) Случай гиперэллиптический с $g > 1$. Этот случай исследуется аналогично предыдущему, если найдена униформизация $y_1 = \varphi(t)$, $y_2 = \psi(t)$. То же самое справедливо и в любых случаях с $g > 1$. Получается разложение по целым степеням локальной переменной, коэффициенты которого являются рациональными функциями от $\varphi(t)$, $\psi(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Анализ поверхности \mathcal{F} вблизи кривой \mathcal{P} , состоящей из особых точек, заключается в следующем. Кривая \mathcal{P} переводится в координатную ось y_1 . Затем полученный многочлен рассматривается как многочлен от y_2, y_3 , коэффициенты которого зависят от параметра y_1 . Для него строится многоугольник Ньютона по y_2, y_3 . Для почти всех значений y_1 этот многоугольник вблизи $y_2 = y_3 = 0$ фиксирован, но в некоторых точках y_1^0 он иной. Эти точки разбивают ось y_1 на отрезки. В каждом отрезке получают свои разложения. Окрестности точек $y_1 = y_1^0$, $y_2 = y_3 = 0$ исследуются отдельно.

Имплементация имеется только для многогранника Ньютона и степенных преобразований [18].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если для кривой $\mathcal{F} : f(x_1, x_2) = 0$ не удалось найти параметризацию, то можно найти несколько более простых приближенных кривых $\tilde{\mathcal{F}}_l : \tilde{f}_l(x_1, x_2) = 0$, $l = 1, \dots, m$, которые приближают исходную кривую \mathcal{F} в своем множестве \mathcal{W}_l пространства \mathbb{R}^2 или \mathbb{C}^2 .

Может случиться, что кривая $\tilde{\mathcal{F}}_l$ параметризуема: $x_1 = \tilde{\varphi}_l(t)$, $x_2 = \tilde{\psi}_l(t)$. Эту параметризацию можно уточнить. Пусть $g(t, \varepsilon) = f(\varphi_l(t) + \beta_1\varepsilon, \psi_l(t) + \beta_2\varepsilon)$. Находим ε по методу Ньютона: из уравнения $f(\varphi_l(t), \psi_l(t)) + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(\varphi_l, \psi_l) = 0$ и т. д. При этом все последовательные добавки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ являются рациональными функциями от $\varphi_l(t)$ и $\psi_l(t)$.

Находить эти кривые $\tilde{\mathcal{F}}_l$ можно так. Пусть

$$f(X) = \sum a_Q X^Q,$$

где $X = (x_1, x_2)$. Каждому слагаемому $a_Q X^Q$ ставится в соответствие точка $\tilde{Q} = (Q, \ln |a_Q|)$. Их совокупность образует сверхноситель $\tilde{\mathbf{S}} \subset \mathbb{R}^3$. Его выпуклая оболочка \mathbf{H} — это многогранник Адамара. Каждой грани $\tilde{\Gamma}_l^{(2)}$ верхней части его границы $\partial \mathbf{H}$ соответствует укороченный многочлен

$$\tilde{f}_l^{(2)}(X) = \sum_{Q \in \tilde{\Gamma}_l^{(2)} \cap \tilde{\mathbf{S}}} a_Q X^Q.$$

Для нормальной формы суперэллиптической кривой $x_2^m = R(x_1)$ множества \mathcal{W}_l ограничены только значениями x_1 , а значения x_2 там произвольны. Точность приближения $\tilde{\mathcal{F}}_l$ к \mathcal{F} можно оценить по точности приближения корней уравнения $\tilde{R}_l(x_1) = 0$ к корням уравнения $R(x_1) = 0$.

ПРИМЕР 7 (продолжение примера 4). Пусть кривая $\mathcal{F} : f \stackrel{\text{def}}{=} -y^2 + ax + bx^3 + cx^5 = 0$, где постоянные $a, b, c \neq 0$. Ее род $\mathbf{g} = 2$.

Если $|ac| < |b|^2$, то имеем два приближенных многочлена $\tilde{f}_1 = -y^2 + ax + bx^3$ и $\tilde{f}_2 = -y^2 + bx^3 + cx^5$. Они приближают многочлен f в $\mathcal{W}_1 = \{x : \ln |x| < \gamma, y - \text{любое}\}$ и $\mathcal{W}_2 = \{x : \ln |x| > \gamma, y - \text{любое}\}$ соответственно, где $\gamma = \frac{\ln |a| - \ln |c|}{4}$. Их кривые $\tilde{\mathcal{F}}_1$ и $\tilde{\mathcal{F}}_2$ имеют род 1, следовательно, параметризуются. На рис. 3. прямая, проходящая через точки \tilde{Q}_1 и \tilde{Q}_5 , показана пунктиром, ее нормаль — это вектор $(\gamma, 1)$.

Если $|ac| > |b|^2$, то имеется один приближенный многочлен $\tilde{f}_3 = -y^2 + ax + cx^5$ для всех x, y . Его кривая $\tilde{\mathcal{F}}_3$ имеет род 2, но благодаря дополнительным симметриям она параметризуется [5, 6, 8, 9] (рис. 4).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Аналогичная техника применима и при $n = 4$, но там может потребоваться глобальная параметризация двумерного алгебраического многообразия, заданного одним многочленом от трех переменных. Если такая глобальная параметризация не находится, то ее можно заменить несколькими приближенными параметризациями, которые находятся с помощью четырехмерного многогранника Адамара.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Униформизация двумерных алгебраических поверхностей с помощью радикалов рассматривается в [21].

Автор благодарит А. Б. Батхина за большую помощь в подготовке этой работы.

Литература

1. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 1, ч. 2. — М.-Л.: Гос. технико-теорет. изд-во, 1993. — 235 с. Engl. transl.: *Goursat E.* Course of Mathematical Analysis. — N. Y.: Dover Publ. Inc., 1959.
2. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979. — 252 с. Engl. transl.: *Bruno A. D.* Local Methods in Nonlinear Differential Equations. — Berlin-Heidelberg-N. Y.-London-Paris-Tokyo: Springer-Verlag, 1989. — 350 p.
3. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Физматлит, 1998. — 288 с. Engl. transl.: *Bruno A. D.* Power Geometry in Algebraic and Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier, 2000. — 395 p.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. / Пер. с англ. — М.: Наука, 1967. — 300 с. Engl. transl.: *Bateman H., Erdélyi A.* Higher Transcendental Functions. Vol. 3. — N. Y.-Toronto-London: McGraw-Hill, 1955. — XVII+292 p.
5. Brezhnev Yu. V. On the uniformization of algebraic curves // Moscow Math. J. — 2008. — Vol. 8, № 2. — P. 233–271.
6. Brezhnev Yu. V. On uniformization of Burnside's curve $y^2 = x^5 - x$ // J. Math. Phys. — 2009. — Vol. 50, № 10. — P. 1–23.
7. Brezhnev Yu. V. The sixth Painlevé transcendent and uniformization of algebraic curves // J. Diff. Equ. — 2016. — Vol. 260, № 3. — P. 2507–2556. DOI: 10.1016/j.jde.2015.10.009.
8. Belokolos E. D., Enolskii V. Z. Reduction of Abelian functions and completely integrable equations. Part I // J. Math. Sci. — 2001. — Vol. 106, № 6. — P. 3395–3486.
9. Belokolos E. D., Enolskii V. Z. Reduction of Abelian functions and completely integrable equations. Part II // J. Math. Sci. — 2002. — Vol. 108, № 3. — P. 295–374.
10. Ōnishi Y. Complex multiplication formulae for hyperelliptic curves of genus three // Tokyo J. Math. — 1998. — Vol. 21. — P. 381–431.
11. Аптекарев А. И., Туляков Д. Н., Ятцелев М. Л. О параметризации одной комплексной алгебраической кривой рода 2 // Мат. заметки. — 2015. — Т. 98, № 5. — С. 782–785. Engl. transl.: *Aptekarev A. I., Tulyakov D. N., Yattselev M. L.* On the parametrization of a certain algebraic curve of genus 2 // Math. Notes. — 2015. — Vol. 95, № 5. — P. 843–846.
12. Aptekarev A. I., Tulyakov D. N., Van Assche W. Hyperelliptic uniformization of algebraic curves of third order // J. Comp. Appl. Math. — 2015. — Vol. 284. — P. 38–49. DOI: 10.1016/j.cam.2014.11.048.
13. Уокер Р. Алгебраические кривые / Пер. с англ., 3-е изд. — М.: Либроком, 2009. — 240 с. Engl. transl.: *Walker R. J.* Algebraic Curves. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1950. — 202 p.

14. *Eilbeck J. C., Enolski V. Z., Matsutani S., Ônishi Y., Previato E.* Abelian functions for trigonal curves of genus three // *Int. Math. Res. Not.* — 2007. — Vol. 2007, № 140. — P. 1–38. DOI: 10.1093/imrn/rnm140.
15. *Eilbeck J. C.* Weierstrass functions for higher genus curves. — URL: <http://www.ma.hw.ac.uk/Weierstrass>
16. *Computational Approach to Riemann Surfaces* / Ed. A. Bobenko and C. Klein. — Berlin: Springer, 2011. — (Lecture Notes in Math.; Vol. 2013.)
17. *Hadamard J.* Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en particulier d'une fonction consideree par Riemann // *J. Math. Pures Appl.* — 1893. — Vol. 9, № 4. — P. 171–215.
18. *Брюно А. Д., Батхин А. Б.* Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии // *Программирование.* — 2012. — Т. 38, № 2. — С. 12–30. Engl. transl.: *Bruno A. D., Batkhin A. B.* Resolution of algebraic singularity by algorithms of Power Geometry // *Program. Comput. Softw.* — 2012. — Vol. 38, № 2. — P. 57–72. DOI: 10.1134/S036176881202003X.
19. *Bruno A. D.* Asymptotic solving essentially nonlinear problems // *Mathematics and Statistics.* — 2016. — Vol. 4, № 1. — P. 27–39. DOI: 10.13189/ms.2016.040104.
20. *Sendra J. R., Sevilla D.* Radical parametrizations of algebraic curves by adjoint curves // *J. of Symbolic Computation.* — 2011. — Vol. 46, № 9. — P. 1030–1038.
21. *Sendra J. R., Sevilla D.* First step towards radical parametrization of algebraic surfaces // *Computer Aided Geometric Design.* — 2013. — Vol. 30. — P. 374–388.

Брюно Александр Дмитриевич
 Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша
 РОССИЯ, 125047, Москва, Миусская пл., 4
 E-mail: abruno@keldysh.ru

CONVEX POLYHEDRON IN THE ASYMPTOTIC ANALYSIS

Bruno A. D.

Methods are proposed for computing the solutions of an algebraic equation with three unknowns near a singular point. These methods are: Newton polyhedron, power transformations, new versions of the implicit function theorem and uniformization of a planar algebraic curve. The presentation begins with a review of known methods for computing solutions of an algebraic equation with two unknown. The Hadamard polyhedron is also introduced.

Key words: convex polyhedron, face, algebraic equation, uniformization.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ¹

А. О. Ватульян, С. А. Нестеров

Рассмотрена задача о нахождении наведенной разности потенциалов термоэлектродупругого слоя. Получено аналитическое решение для однородного слоя. Проведено сравнение динамического и квазистатического решений. Получено численное решение для неоднородного слоя. Рассмотрено влияние различных законов неоднородности на наведенный электрический потенциал.

Ключевые слова: термоэлектродупругость, неоднородный слой, тепловой удар.

Введение

Уравнения термоэлектродупругости [1], полученные в начале 60-х гг. XX века, имеют важное приложение при моделировании и расчете пирозлектрических датчиков. Так, при определении наведенной разности потенциалов в пироматериалах необходим учет связанности теплового, электрического и упругих полей. Для этого необходимо решать связанные задачи термоэлектродупругости.

В настоящее время задачи термоэлектродупругости для однородных тел изучены достаточно хорошо. Так, в работах [2–8] получены аналитические решения задач термоэлектродупругости для однородных и слоистых материалов. Однако в последнее время стали широко распространяться функционально-градиентные пироматериалы (ФГПМ), в которых материальные свойства изменяются непрерывно, что позволяет избежать появления расслоений и растрескиваний, присущих слоистым материалам. При этом решения задач термоэлектродупругости для ФГПМ получены только для степенных и экспоненциальных законов неоднородности [9, 10].

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-01-00354-а.

В данной работе ставится задача определения наведенной разности потенциалов, возникшей под действием теплового потока на слой из пьезокерамики класса $6mm$. При этом исследуются результаты, полученные в двух постановках — динамической (точной) и квазистатической (приближенной).

1. Постановка задачи термоэлектроупругости для слоя

Рассмотрим задачу о воздействии тепловым потоком на слой из пьезокерамики класса $6mm$ толщиной $2H$, поляризованного вдоль оси x_3 . Нижняя плоскость жестко закреплена, а верхняя свободна от напряжений. На верхней и нижней плоскостях в силу пирозффекта наводится разность потенциалов. Начально-краевая задача в предположении одномерности процесса описывается следующей системой [6]:

$$(c_{33}u')' + (e_{33}\varphi')' - (\gamma_{33}\theta)' = \rho\ddot{u}, \quad (1)$$

$$(e_{33}u')' + (\varepsilon_{33}\varphi')' + (g_3\theta)' = 0, \quad (2)$$

$$-T_0(\gamma_{33}\dot{u}' - g_3\dot{\varphi}') + (k_{33}\theta)' - c_\varepsilon\dot{\theta} = 0, \quad (3)$$

$$u(-H, t) = \theta(-H, t) = 0, \quad \varphi(-H, t) = -\varphi_0(t), \quad (4)$$

$$\sigma(+H, t) = 0, \quad -k_{33}\theta'(+H, t) = q(t), \quad \varphi(+H, t) = +\varphi_0(t), \quad (5)$$

$$\theta(x_3, 0) = u(x_3, 0) = \dot{u}(x_3, 0) = 0. \quad (6)$$

Условие для тока:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_+} (e_{33}u' - \varepsilon_{33}\varphi' + g_3\theta)|_{x_3=H} dS = -I(t). \quad (7)$$

Здесь u — перемещение, θ — приращение температуры, σ — напряжение, c_{33} — компонента тензора модулей упругости, ρ — плотность, c_ε — удельная объемная теплоемкость при постоянном тензоре деформации, γ_{33} — компоненты тензора температурных напряжений, e_{33} — компонента тензора пьезокоэффициентов, ε_{33} — компонента тензора диэлектрических проницаемостей, g_3 — компонента тензора пирозкоэффициентов, $q(t)$ — плотность теплового потока.

Обезразмерим задачу (1)–(6), введя следующие безразмерные параметры и функции, согласно формулам [6]:

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{x_3}{H}, \quad U = \frac{u}{H}, \quad W = \frac{\theta}{\theta_0}, \quad \theta_0 = \sqrt{\frac{T_0 s_0}{c_0}}, \\
 Q &= \frac{q}{q_0}, \quad q_0 = \frac{k_0 \theta_0}{H}, \quad V = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad \phi_0 = H \sqrt{\frac{s_0}{\vartheta_{33}}}, \\
 J(t) &= \frac{I(t)}{I_0}, \quad I_0 = \frac{k_0 S \sqrt{\vartheta_{33} s_0}}{c_0 H^2}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{s_0}{\rho_0}}, \quad c_{33}^* = c_{33} + \frac{e_{33}^2}{\vartheta_{33}}, \\
 \gamma_{33}^* &= \gamma_{33} - \frac{e_{33} g_3}{\vartheta_{33}}, \quad c_\varepsilon^* = c_\varepsilon - \frac{T_0 g_3^2}{\vartheta_{33}}, \quad t_1 = \frac{H}{v_0}, \\
 t_2 &= \frac{H^2 c_0}{k_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_2}, \quad \bar{s}(z) = \frac{c_{33}^*(x_3)}{s_0}, \quad \bar{k}(z) = \frac{k_{33}(x_3)}{k_0}, \\
 \bar{\rho}(z) &= \frac{\rho(x_3)}{\rho_0}, \quad \bar{c}(z) = \frac{c_\varepsilon^*(x_3)}{c_0}, \quad \bar{\gamma}(z) = \frac{\gamma_{33}^*(x_3)}{\gamma_0}, \\
 k_0 &= \max_{x_3 \in [0, l]} k_{33}(x_3), \quad c_0 = \max_{x_3 \in [0, l]} c_\varepsilon^*(x_3), \quad \gamma_0 = \max_{x_3 \in [0, l]} \gamma_{33}^*(x_3), \\
 \rho_0 &= \max_{x_3 \in [0, l]} \rho(x_3), \quad s_0 = \max_{x_3 \in [0, l]} c_{33}^*(x_3), \quad \delta_0 = \frac{t_1}{t_2}, \\
 d_1 &= \gamma_0 \sqrt{\frac{T_0}{s_0 c_0}}, \quad d_2 = g_3 \sqrt{\frac{T_0}{\vartheta_{33} c_0}}, \quad d_3 = \frac{e_{33}}{\sqrt{c_0 \vartheta_{33}}}, \quad d_4 = \frac{d_2}{d_3}, \\
 d_5 &= \frac{1}{d_3}, \quad \Omega = \frac{\sigma}{s_0}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

После обезразмеривания и исключения потенциала, задача термоэлектроупругости (1)–(6) сводится к задаче термоупругости с модифицированными коэффициентами:

$$(\bar{s}(z)U')' - d_1 (\bar{\gamma}(z)W)' = \delta_0^2 \rho \ddot{U}, \tag{9}$$

$$(\bar{k}(z)W')' - \bar{c}(z)\dot{W} - d_1 \bar{\gamma}(z)\dot{U}' + d_2 J(t) = 0, \tag{10}$$

$$U(-1, \tau) = W(-1, \tau) = 0, \tag{11}$$

$$\Omega(1, \tau) = 0, \quad -k(1)W'(1, \tau) = Q(\tau), \quad (12)$$

$$W(z, 0) = U(z, 0) = \dot{U}(z, 0) = 0. \quad (13)$$

Здесь

$$\Omega(z, \tau) = U'(z, \tau) - d_1 \bar{\gamma} W(z, \tau) + d_3 \int_0^\tau J(y) dy$$

— напряжение.

Неизвестная разность потенциалов может быть найдена в результате интегрирования условия для тока:

$$V_0(\tau) = d_2 \int_{-1}^1 W(\xi, \tau) d\xi + d_3 U(1, \tau) + \int_0^\tau J(y) dy. \quad (14)$$

После применения преобразования Лапласа по времени к (9)–(12) с учетом начальных условий (13) приходим к системе относительно трансформант неизвестных функций:

$$(\bar{s}(z)\tilde{U}')' - d_1(\bar{\gamma}(z)\tilde{W})' = \delta_0^2 p^2 \rho \tilde{U}, \quad (15)$$

$$(\bar{k}(z)\tilde{W}')' - p\bar{c}(z)\tilde{W} - d_1 p \bar{\gamma}(z)U' + d_2 \tilde{J}(p) = 0, \quad (16)$$

$$\tilde{U}(-1, p) = \tilde{W}(-1, p) = 0, \quad (17)$$

$$\tilde{\Omega}(1, p) = 0, \quad -k(1)\tilde{W}'(1, p) = \tilde{Q}(p). \quad (18)$$

Трансформанта наведенной разности потенциалов примет следующий вид:

$$\tilde{V}_0(p) = d_2 \int_{-1}^1 \tilde{W}(\xi, p) d\xi + d_3 \tilde{U}(1, p) + \frac{\tilde{J}(p)}{p}. \quad (19)$$

В силу малости параметра δ_0 безразмерные напряжения могут быть найдены из решения квазистатической задачи, если в (15)–(18) положить $\delta_0 = 0$.

Представим зависимость трансформанты потенциала $\tilde{V}_0(p)$ от $\tilde{Q}(p)$ и $\tilde{J}(p)$ в следующем виде:

$$\tilde{V}_0(p) = W_1(p)\tilde{Q}(p) + W_2(p)\tilde{J}(p), \quad (20)$$

где $W_1(p)$ и $W_2(p)$ — передаточные функции.

Рассмотрим определение передаточных функций для однородного слоя в динамической и квазистатической постановках.

2. Построение передаточных функций для однородного слоя

В случае однородного слоя в (15)–(18) полагаем безразмерные коэффициенты равными единице.

Будем отыскивать решения, отвечающие следующим требованиям: \tilde{U} — нечетная, \tilde{W} — четная по координате z . Общий вид решений \tilde{U} и \tilde{W} имеет следующие представления [6]:

$$\tilde{U}(z, p) = (\lambda_1^2 - p)A_1 sh\lambda_1 z + (\lambda_2^2 - p)A_2 sh\lambda_2 z, \quad (21)$$

$$\tilde{W}(z, p) = d_1 p(A_1 \lambda_1 ch\lambda_1 z + A_2 \lambda_2 ch\lambda_2 z) + \frac{d_2}{p}\tilde{J}(p), \quad (22)$$

где λ_j , $j = 1, 2$, — корни характеристического уравнения

$$\lambda^4 - \lambda^2(p(1 + d_1^2) + \delta_0^2 p^2) + \delta_0^2 p^3 = 0. \quad (23)$$

Удовлетворяя граничным условиям (16), (17), находим решения \tilde{U} и \tilde{W} системы (15), (16). Подставляя найденные выражения для \tilde{U} и \tilde{W} в (19), были получены выражения для передаточных функций $W_1(p)$ и $W_2(p)$, которые имеют довольно громоздкий вид.

В работе построены асимптотики передаточных функций $W_1(p)$ и $W_2(p)$:

- при $p \rightarrow 0$

$$W_1(p) = \frac{d_1 d_3 + d_2}{d_3(1 + d_1^2)} + O(p), \quad (24)$$

$$W_2(p) = \frac{1}{p} \left[\frac{(d_1 d_2 - d_3)^2}{d_3(1 + d_1^2)} + \frac{1 + d_2^2}{d_3} \right] + O(1); \quad (25)$$

• при $p \rightarrow \infty$

$$W_1(p) = B_{11} \frac{1}{\sqrt{p}} + B_{12} \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p\sqrt{p}}\right), \quad (26)$$

$$W_2(p) = B_{21} \frac{1}{p} + B_{22} \frac{1}{p\sqrt{p}} + O\left(\frac{1}{p^2}\right), \quad (27)$$

где

$$B_{11} = \frac{d_3}{d_2}, \quad B_{12} = \frac{d_1(d_3 - d_1 d_2)}{d_3 \delta_0},$$

$$B_{21} = \frac{1 + d_2^2}{d_3}, \quad B_{22} = \frac{d_3(1 - d_1 d_4)^2}{\delta_0}.$$

Рассмотрим процедуру нахождения приближенного значения $\tilde{V}_0(p)$.

После исключения трансформанты смещения $\tilde{U}(z, p)$ из (15) и некоторых преобразований получаем задачу теплопроводности с модифицированными коэффициентами:

$$\tilde{W}'' + (1 + d_1)^2 \tilde{W} + (d_2 + d_1 d_3) \tilde{J}(p) = 0, \quad (28)$$

$$W(-1, p) = 0, \quad -\tilde{W}'(1, p) = \tilde{Q}(p). \quad (29)$$

Решая ее и проводя аналогичные действия как и при динамическом подходе, находим передаточные функции приближенного решения:

$$W_{1A} = \frac{d_1 d_3 + d_2}{d_3(1 + d_1^2)} \frac{th(\sqrt{p(1 + d_1^2)})}{\sqrt{p(1 + d_1^2)}}, \quad (30)$$

$$W_{2A} = \frac{1}{p} \left[\frac{(d_1 d_2 - d_3)^2}{d_3(1 + d_1^2)} + \frac{1 + d_2^2}{d_3} \right]. \quad (31)$$

При малых p главные члены асимптотик передаточных функций точного решения и главные члены передаточных функций приближенного решения полностью совпадают. Это означает идентичность стационарного (при $t \rightarrow \infty$) решения для динамической и квазистатической постановок. При больших p главные члены асимптотик передаточных функций точного решения и передаточных функций приближенного решения не совпадают, но имеют одинаковую структуру (они убывают как p^{-1}).

В вычислениях принято $\delta_0 = 10^{-8}$, $d_1 = 0.004$, $d_2 = 0.02$, $d_3 = 0.3$.

Для того чтобы оценить погрешность приближенного подхода, введем в рассмотрение функции, характеризующие отношение точного значения трансформанты соответствующей передаточной функции к приближенному:

$$W_1^n(p) = \frac{W_1(p)}{W_{1A}(p)}, \quad W_2^n(p) = \frac{W_2(p)}{W_{2A}(p)}. \quad (32)$$

Значения функций (32) при $p = 0$ равны 1 и мало отличаются от 1 вплоть до $p < 230$. При $p \rightarrow \infty$ эти функции стремятся к некоторым постоянным величинам

$$A_1 = \lim_{p \rightarrow \infty} W_1^n = 4.29, \quad A_2 = \lim_{p \rightarrow \infty} W_2^n = 1.02. \quad (33)$$

Значение $A_1 > 4$ свидетельствует о значительных расхождениях предельных значений точной и приближенной восстановлению функций, что, в свою очередь, приводит к большой погрешности в определении потенциала при малых временах.

3. Исследование потенциала однородного слоя при различных тепловых нагрузках

Считаем, что пьезоэлемент включен в электрическую цепь, состоящую из сопротивления R и емкости C . Тогда трансформанту наведенного потенциала можно рассчитать по формуле [6]:

$$\tilde{V}_0(p) = \frac{W_1(p)(m_1 p + m_2) \tilde{Q}(p)}{m_1 p + m_2 - p W_2(p)}, \quad (34)$$

где

$$m_1 = \frac{R I_0}{\phi_0}, \quad m_2 = \frac{I_0 t_0}{C \phi_0}.$$

Рассмотрим типы тепловой нагрузки, которые наиболее часто используются при моделировании формы теплового взаимодействия:

- 1) $Q(\tau) = \delta(\tau)$;
- 2) $Q(\tau) = H(\tau)$;
- 3) $Q(\tau) = H(\tau) - H(\tau - \tau_1)$.

Чтобы выяснить характер поведения потенциала при различных тепловых нагрузках, необходимо к формуле (34) применить обратное преобразование Лапласа. В работе для нахождения $V_0(\tau)$ используется численный метод обращения Лапласа, разработанный Ф. Дурбиным [13].

Для малых времен можно получить аналитические выражения для $V_0(\tau)$. Для этого были построены соответствующие асимптотики.

Для первого типа нагрузки

$$V_0(\tau) = \frac{B_{11}}{\sqrt{\pi\tau}} + B_{12} + 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left(\frac{B_{12}m_2 + B_{21}}{m_1} \right) + O(\tau), \quad (35)$$

для второго —

$$V_0(\tau) = 2B_{11}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} + B_{12}\tau + \frac{4\tau}{3}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \frac{(B_{12}m_2 + B_{21})}{m_1} + O(\tau^2), \quad (36)$$

для третьего —

$$\begin{aligned} V_0(\tau) = & \frac{2d_3}{d_2\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\tau} - H(\tau - \tau_1)\sqrt{\tau - \tau_1} \right) + \\ & + \frac{d_1}{d_3} (\tau - H(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_1)). \end{aligned} \quad (37)$$

В вычислениях было принято: $m_1 = 0.37701$, $m_2 = 31.4175$. Для всех типов тепловой нагрузки на слой асимптотики дают результаты с погрешностью менее 1% при $\tau < 10^{-13}$.

Проведено сравнение решений, полученных в рамках динамической и квазистатической моделей. Оказалось, что квазистатический и динамический подходы дают величины потенциала, различающиеся менее чем на 1% при $\tau > 10^{-9}$ для нагрузки первого типа и при $\tau > 10^{-5}$ для нагрузки второго и третьего типа.

Исходя из анализа результатов, полученных в результате исследования характера потенциала при различных тепловых нагрузках, были сделаны выводы: для первого типа нагрузки при $\tau \rightarrow 0$ потенциал растет степенным образом, а при $\tau \rightarrow \infty$ — экспоненциально убывает; для второго типа потенциал монотонно растет от нуля и со временем выходит на некоторое предельное значение; в случае третьего типа потенциал монотонно растет от нуля до пикового значения, достигаемого при $\tau = \tau_1$, а затем быстро стремится к нулю с ростом τ .

4. Нахождение наведенного электрического потенциала неоднородного слоя

В случае неоднородного слоя примем, что нижняя плоскость слоя заземлена (потенциал равен нулю), а на другой в силу пирозффекта наводится электрический потенциал. Построим решение задачи термоупругости с модифицированными коэффициентами (15)–(18) в случае отсутствия тока в цепи при помощи сведения задачи к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, как в [6]:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(z, p) = & \int_{-1}^1 K_1(z, \xi, p) \widetilde{W}(\xi, p) d\xi + \\ & + \int_{-1}^1 K_2(z, \xi, p) \widetilde{\Omega}(\xi, p) d\xi + g(z, p), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\widetilde{\Omega}(z, p) = \int_{-1}^1 K_3(z, \xi, p) \widetilde{W}(\xi, p) d\xi + \int_{-1}^1 K_4(z, \xi, p) \widetilde{\Omega}(\xi, p) d\xi. \quad (39)$$

Здесь ядра $K_1(z, \xi, p)$, $K_2(z, \xi, p)$, $K_3(z, \xi, p)$, $K_4(z, \xi, p)$ и правая часть $g(z, p)$ имеют вид, аналогичный [11, 12].

Численно-аналитические решения СЛАУ, получившиеся после дискретизации системы (38), (39), показали, что трансформанты температуры и напряжения в узловых точках являются дробно-рациональными функциями от параметра преобразования Лапласа p , которые не имеют особых точек, кроме комплексных полюсов, определяемых ядрами системы и типом нагрузки. Поэтому для нахождения оригиналов температуры и напряжений в работе применялась теория вычетов: оригиналы находились в виде конечной суммы показательных функций, причем их показатели соответствуют корням знаменателя.

Точность численного решения задачи проверялась путем сравнения с аналитическим решением для однородного слоя. Выяснено, что точность решения сильно зависит от параметра дискретизации системы (38), (39) — количества разбиений в квадратурной формуле

трапеций n . На больших временах $\tau > 0.1$, для того чтобы относительная погрешность решения была менее 1%, необходимо брать $n = 12$ разбиений в квадратурной формуле трапеций. На малых временах $\tau \in [10^{-12}, 10^{-1}]$ необходимо брать $n = 40$.

Проведено сравнение решений, полученных в рамках динамической и квазистатической моделей для неоднородного слоя. Оказалось, что в случае неоднородного слоя квазистатический и динамический подходы дают величины потенциала, различающиеся менее чем на 1% при $\tau > 10^{-6}$ для нагрузок всех типов.

Исследовалось влияние различных законов неоднородности коэффициента теплопроводности слоя на характер изменения наведенного электрического потенциала при каждой из трех тепловых нагрузок. На рис. 1 представлен график изменения электрического потенциала, наводимого под воздействием тепловой нагрузки $Q(\tau) = \delta(\tau)$; на рис. 2 — под воздействием нагрузки $Q(\tau) = H(\tau)$; на рис. 3 — под воздействием нагрузки $Q(\tau) = H(\tau) - H(\tau - \tau_1)$. При этом сплошной линией изображено изменение наведенного потенциала при $\bar{k}(z) = 1$; штрихпунктирной — при $\bar{k}(z) = \cos(z)$; точками — при $k(z) = z^2 - z + 1$.

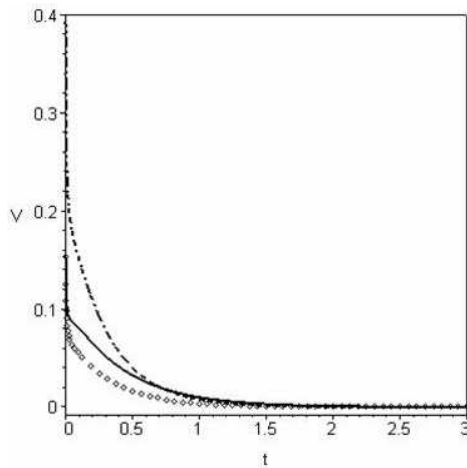


Рис. 1. Изменение электрического потенциала при тепловой нагрузке $Q(\tau) = \delta(\tau)$.

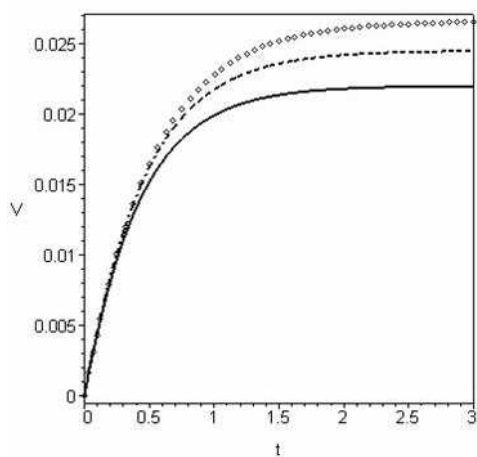


Рис. 2. Изменение электрического потенциала при тепловой нагрузке $Q(\tau) = H(\tau)$.

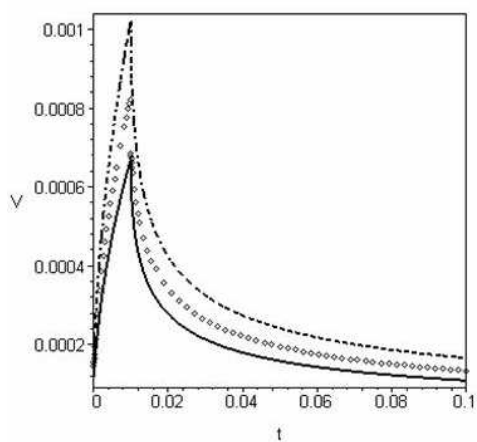


Рис. 3. Изменение электрического потенциала при тепловой нагрузке $Q(\tau) = \delta(\tau)$.

Из анализа рисунков видно, что различные законы неоднородности оказывают большое влияние на наведенный электрический потенциал. При этом в случае нагрузки первого типа для нахождения потенциала на малых временах необходимо построить соответствующую асимптотику.

Литература

1. Mindlin R. Equations of high frequency, vibrations of thermopiezoelektric crystal plates // Int. J. Solids Struct. — 1974. — Vol. 10. — P. 625–637.
2. Chandrasckharaiah D. A generalized linear thermoelasticity theory for piezoelectric media // Acta Mech. — 1988. — Vol. 71, № 4. — P. 39–49.
3. Paul H., Renganathan K. Free vibrations of a pyroelectric layer of hexagonal (6mm) class // J. Acoust. Soc. Amer. — 1985. — Vol. 78, № 2. — P. 395–397.
4. Rao S., Sunar R. Analysis of distributed thermopiezoelectric sensors and actuators in advanced intelligent structures // Amer. Inst. of Aeronautics and Astronautics J. — 1993. — Vol. 7, № 4. — P. 1280–1286.
5. Shen S., Kuang Z. B. An active control model of laminated piezothermoelastic plate // Int. J. Solids Struct. — 1999. — Vol. 13. — P. 1925–1947.
6. Ватульян А. О. Тепловой удар по термоэлектроруупругому слою // Вестн. Дон. гос. техн. ун-та. — 2001. — Т. 1 (7), № 1. — С. 82–89.
7. Bassionny E., Youssef H. Two-temperature generalized thermopiezoelectricity of finite rod subjected to different types of thermal loading // J. Therm. Stresses. — 2008. — Vol. 31. — P. 233–245.
8. Bassionny E., Youssef H. Thermo-elastic properties of thin ceramic layers subjected to thermal loadings // J. Thermoelasticity. — 2013. — Vol. 1, № 1. — P. 4–12.
9. Yoshihiro O., Yoshinobu T. Transient piezothermoelastic problem of a thick functionally graded thermopiezoelectric strip due to nonuniform heat suppl // Arch. Appl. Mech. — 2005. — Vol. 74. — P. 449–465.
10. Yoshihiro O., Yoshinobu T. Transient piezothermoelastic analisys for a functionally graded thermopiezoelectrical hollow sphere // Composite Struct. — 2007. — Vol. 81. — P. 767–773.
11. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // Int. J. Solids Struct. — 2014. — Vol. 51, № 3. — P. 767–773.
12. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел // Инженерно-физ. журн. — 2014. — Т. 87, № 1. — С. 217–224.
13. Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method // The Computer J. — 1974. — Vol. 17. — P. 371–376.

Ватульян Александр Ованесович

Южный федеральный университет

РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;

Южный математический институт — филиал ВЦ РАН

РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: vatulyan@math.rsu.ru

Нестеров Сергей Анатольевич

Южный математический институт — филиал ВЦ РАН

РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: 1079@list.ru

**DYNAMIC PROBLEMS OF THERMOELASTICITY
FOR INHOMOGENEOUS BODIES**

Vatulyan A. O., Nesterov S. A.

The problem of determining the induced potential of thermoelectroelastic layer is considered. The analytical solution for a homogeneous layer is obtained. A comparison of dynamic and quasi-static solutions is investigated. A numerical solution for the inhomogeneous layer is obtained. The influence of various laws of inhomogeneity on induced electrical potential is considered.

Key words: thermoelectroelasticity, inhomogeneous layer, heat stroke.

СЕТЕВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ: ПЕРЕХОД К СИНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ПАРАДИГМЕ¹

Н. Е. Смирнов, В. А. Тестов

В статье рассматривается проблема использования сетевых технологий в образовании. Показывается, что сетевое образовательное пространство представляет собой сложную открытую самоорганизующуюся систему. Поэтому сетевые технологии можно эффективно использовать лишь при условии опоры на принципы синергетики. Важнейшим средством реализации синергетического подхода в образовании являются учебные сетевые проекты, предназначенные для решения познавательных проблемных ситуаций.

Ключевые слова: сетевые технологии, самоорганизация, самообразование, хаос, принципы синергетики, когерентность, открытость, совместная проектная деятельность, сетевые проекты, проблемные ситуации.

1. Введение

Двадцать первый век все больше связывают с развитием и преобладанием сетевых технологий, проникновением их во все большее число сфер социальной жизни. Широкое распространение сетевых технологий несомненно облегчило доступ каждому человеку к самой современной информации, но вместе с тем привело к тому, что человек наряду с действительно нужной и полезной информацией получает много совершенно бесполезной, искаженной и даже ложной информации, так называемых «информационных шумов».

Учащиеся попадают в своего рода ножницы, когда знания, получаемые от учителя, из учебника, перекрываются потоком хаотичной информации, идущей, прежде всего, от Интернета и СМИ. Причем эта информация оказывает на восприятие гораздо большее влияние, поскольку опосредована более высоким уровнем мотивации и более значимым эмоциональным фоном. Именно эта сфера в значительной степени формирует у человека когнитивные, коммуникативные и эмоциональные стереотипы, определяющие его деятельность.

¹Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, проект № 16-18-10304.

Этим объясняется то, что в процессе интенсивного применения современных информационных технологий происходит «паралич человеческого мышления», полное подчинение сознания Интернету или телевидению, человек утрачивает способность думать, понимать и чувствовать.

Сетевое пространство становится второй виртуальной реальностью личности, а для многих людей оно становится основным полем жизнедеятельности, где люди проводят большую часть своей жизни. Сетевое пространство в одном случае обеспечивает условия для саморазвития студентов, а в другом — оказывает негативное влияние на их личностное развитие. Определяющим фактором того, что это будет позитивное или негативное влияние, является уровень зрелости личности, ее ценностно-смысловой сферы и способности управлять своей жизнью. Однако необходимый уровень зрелости даже в юношеском возрасте достигается далеко не каждым человеком, в связи с чем погружение в такую среду может повлечь за собой личностные деформации. В качестве примера таких деформаций можно привести компьютерные зависимости, в частности, интернет-зависимость, которая проявляется в навязчивом желании подключиться и воспользоваться ресурсами Интернета и болезненной неспособностью вовремя отключиться от него. Интернет-зависимость также характеризуется стремлением пользователей к уходу от реальности.

Широкое внедрение сетевых технологий в обучение происходит без достаточного научно-педагогического осмысления происходящих процессов. Можно констатировать, что пока научное педагогическое сообщество больше ставит проблемы, чем указывает пути их решения. Новая система обучения и воспитания должна учитывать все революционные изменения в культурном контексте современного общества, обусловленные массовым вхождением в жизнь человека мировой информационной сети.

2. Основные методы и результаты

В сетевом обществе для успешного участия в деятельности надо уметь работать с информационными потоками, уметь анализировать происходящее в быстро меняющейся реальности, быть динамичным, коммуникабельным, уметь принимать оптимальные решения. Меняются и формы деятельности. Социально-экономические процессы породили такую форму организации труда, как совместная проектная деятельность. По мнению В. Д. Шадрикова, «представляется

обоснованным не только введение в систему дидактических понятий категории совместной деятельности, но и ее глубокий анализ; ... именно теория совместной деятельности может стать теоретическим конструктором новой дидактики» [7].

Следует заметить, что в современном мире практически уже вся деятельность является коллективной, и, следовательно, коллективная учебная деятельность в гораздо большей степени способствует формированию компетенций, чем индивидуальная. Поэтому в качестве ведущего должен рассматриваться принцип обучения в кооперации и сотрудничестве в решении учебных и профессиональных проблем в первую очередь при коллективном обучении через сеть.

Взаимодействие через сеть обучающихся и компьютера можно охарактеризовать как интеллектуальное партнерство, представляющее так называемый «распределенный интеллект». Сфера взаимодействия обучаемых в значительной степени смещается в сферу сетевого пространства, где они должны совместно решать поставленные перед ними проблемы или те проблемы, которые они сами формулируют. На первый план выдвигается проективное начало, компьютерные сети используются не столько для получения знаний, сколько для сотрудничества, обучения коллективным усилиям, получения опыта профессиональной деятельности. Сетевые технологии способствуют решению проблемы мотивации, сближению процессов обучения и исследования. Взаимодействие в виртуальной среде во многом снимает проблемы субъективно-психологического характера, часто мешающие решению поставленных задач в условиях реального общения.

Применение сетевых технологий и компьютерной техники в обучении ведет к тому, что образовательная среда приобретает совсем другие возможности и ограничения, порождая новую педагогическую реальность. Новая реальность приводит к необходимости использования в образовании беспорядочной, хаотической основы, когда в учебный процесс вводится фактор творческой непредсказуемости, а в рамках этой среды каждый обучающийся наделяется правом активно выбирать свою образовательную траекторию. В этих условиях образовательные системы, во всяком случае, их основные подсистемы, связанные с передачей информации, усвоением нового, творчеством, должны быть отнесены к сложным открытым нелинейным самоорганизующимся системам. Более того, по классификации М. С. Кагана, такие системы относятся к сверх-

сложным или антропо-социо-культурным; они отличаются от других сложных систем разнородностью их субстрата — не однородно-биологического, а синтезирующего свойства природы, общества и воплощенной в культуре человеческой деятельности [2].

Для многих сложных систем характерно явление самоорганизации. Оно приводит к тому, что очень часто для характеристики объекта, который описывается большим или даже бесконечным числом величин, оказывается достаточно всего несколько переменных, так называемых параметров порядка. Эти параметры «подчиняют» остальные переменные, определяя их значения. Все эти процессы описываются в синергетике.

Исследователям известны механизмы самоорганизации, приводящие к выделению параметров порядка, способы их описания, соответствующие математические модели. Однако, вероятно, как отмечает Г. Г. Малинецкий, наш мозг обладает блестящими способностями находить эти параметры, «упрощать реальность», владеет более эффективными алгоритмами их выделения. Процесс обучения, получения образования позволяет находить в одних случаях удачные комбинации, которые могут быть параметрами порядка в определенных ситуациях, или механизмы поиска таких параметров («учиться учиться», «учиться решать нестандартные задачи») [4].

Самоорганизация знания, возникновение у школьника, студента, аспиранта системы знаний представляется исключительно сложным, интересным и мало изучавшимся процессом. При этом выделение основных идей, навыков, концепций выступает как своеобразная самоорганизация, выделение параметров порядка. Эта проблема представляется весьма общей. Попытки исследователей в области синергетики построить вычислительные системы, имитирующие архитектуру мозга, так называемые нейрокомпьютеры, показали, что центральным моментом здесь являются алгоритмы обучения нейронных сетей, алгоритмы самоорганизации.

Все, что относится к динамике учебно-воспитательного процесса, не может быть ни полным, ни достоверным с детерминистических позиций. Тем самым методологической основой образовательной парадигмы в информационном обществе должна стать постнеклассическая методология, которая основана на синергетическом мировидении и идеях мягкого моделирования. Ключевым в синергетике является понятие самоорганизации. Систему называют самоорганизующейся, если она без специфического внешнего воздействия обре-

тает какую-то пространственную, временную или функциональную структуру. Под специфическим внешним воздействием мы понимаем такое, которое навязывает системе структуру или функционирование. В случае же самоорганизации система испытывает извне неспецифическое воздействие.

Особенностью систем, способных к самоорганизации, является наличие в них бифуркаций. Понятие бифуркации встречается довольно часто в теории нелинейных дифференциальных уравнений. Слово бифуркация означает раздвоение и употребляется сейчас в науке в широком смысле для обозначения всевозможных качественных перестроек или метаморфоз различных объектов при изменении параметров, от которых они зависят. В момент бифуркации возрастает вероятность свершения даже маловероятных событий. Тем самым из синергетических представлений вытекает, что вероятность событий является в принципе непредсказуемой, недетерминированной. Более того, вероятностное описание сложных и сверхсложных систем является весьма проблематичным. Вероятность — это количественная мера случайности. Но количественное описание поведения сложных систем на данном этапе развития науки наталкивается на большие трудности. Один из основоположников синергетики Г. Хакен пишет: «Я настроен очень скептически относительно возможности количественных предсказаний для сложных систем, таких как экономические или социальные. Хотя нам очевидна необходимость таких предсказаний, мы должны осознавать их большие ограничения» [6, с. 121].

Вместе с тем синергетика — это междисциплинарный подход, который создает основу для конструктивного, творческого взаимодействия разных научных направлений, дающий содержательный язык для такого взаимодействия — язык математических моделей. Таким образом, синергетика дает возможность упрощенного математического анализа, моделирования систем со сложным поведением. Через нелинейную математику, через бурный рост нелинейных задач и разработку методов их решения, через вычислительный эксперимент накапливаются новые факты, кристаллизуется глубокий мировоззренческий смысл понятий «нелинейность», «самоорганизация», «динамическая устойчивость» и др. Через язык математического описания проступает фундаментальная общность процессов рождения, усложнения, видоизменения и тенденций к распаду в самых разных областях действительности.

Интерес к синергетике в педагогической среде рос в 90-е гг. XX века по мере перевода трудов ее основоположников и публикации работ отечественных ученых и философов, развивающих теорию. Однако пока только отдельные энтузиасты совершают попытки перейти от освоения теории самоорганизации к педагогической практике. Дело в том, что условия классно-урочной системы и использование всеми одного и того же учебника регламентирует настолько сильно учебный процесс, что только в отдельных исключительных случаях можно говорить об использовании синергетического подхода. Одним из главных препятствий для соединения синергетического мировидения и развития инновационных педагогических систем является преодоление в сознании педагогов неизбежных рецидивов ньютоновского детерминизма и линейного мышления. Более того, как отмечают Е. Н. Князева и С. П. Курдюмов, «в условиях современного мира линейное мышление, до сих пор доминирующее в некоторых областях науки, становится принципиально недостаточным, и даже опасным» [3].

Синергетический подход в образовании — это подход, основанный на поиске и использовании внутренних тенденций развития образовательных систем, их саморазвития, самоорганизации, не навязывающий этим системам не свойственных им путей развития. Для субъекта саморазвитие в учебном процессе принимает форму самообразования. Ведь главное — не передача знаний (всего передать невозможно!), а овладение способами пополнения знаний и быстрой ориентации в сложно организованных и разветвленных системах знания и способами самообразования. Вопросы самообразования в отечественной педагогике мало разработаны, а на этапе школьного образования практика самообразования учащихся почти полностью отсутствует.

Классическая педагогика не принимала того факта, что при самообразовании в учебном процессе должна быть определенная доля хаоса, что флуктуации на микроуровне играют существенную роль в определении наличных тенденций, «целей» процессов на макроуровне. В эпоху сетевого общества становится все более очевидным конструктивная роль хаоса. Хаос предстает в качестве механизма выхода на структуры-аттракторы эволюции. Стало быть, бессмысленно бороться против хаоса, стремиться полностью вытеснить деструктивные элементы из образовательного процесса. Синергетика утверждает, что хаос имеет конструктивное начало, что это путь к инновации.

О созидательной роли хаоса в обучении писал еще Л. Н. Толстой. Но если раньше конструктивную роль хаоса в учебном процессе использовали лишь наиболее талантливые и опытные педагоги, то в современных условиях информационного общества использование этой роли в практике учителя на основе синергетических закономерностей должно стать массовым.

Синергетический подход в педагогике основан на нескольких основных принципах.

Принцип неопределенности. Этот принцип предполагает нелинейный стиль мышления, неоднозначность теоретических построений. Нелинейность в философском смысле есть нарушение условий аддитивности и пропорциональности в некотором явлении, т. е. результат суммы воздействий не равен сумме их результатов, результат непропорционален усилиям; целое не есть сумма его частей; качество суммы не тождественно качеству слагаемых и т. д. Последнее, в частности, следует из того факта, что в системе число связей между ее элементами растет быстрее числа самих элементов. Из этого принципа вытекает, что учитель не может быть вполне уверен в своем понимании ученика; сам ученик не может точно знать, что ему необходимо в данный момент; невозможно с полной определенностью предсказать направление и темп развития ученика; только вместе, в процессе диалога, субъекты образовательного взаимодействия могут находить приближенные решения текущих проблем, позволяющие двигаться дальше.

Принцип открытости. В силу этого принципа необходима открытость соответствующей образовательной системы (среды), открытость каждой отдельной личности. Личность должна иметь возможность свободно перемещаться во всех измерениях пространства информационного взаимодействия, иметь доступ к многообразию учебных текстов, поэтому невозможно обходиться одним учебником — одно и то же руководство для всех учеников заведомо лишает их свободы выбора. Современные средства ИКТ позволяют реализовать обеспечение различных форм контакта обучающегося с изучаемыми объектами и явлениями изучаемой предметной области. Необходимым условием открытости среды образовательного учреждения выступает удержание работающими в ней педагогами творческой, исследовательской позиции. Учитель должен быть свободен в выборе методики преподавания.

Принцип когерентности — согласованность взаимодействия элементов, которая проявляется в масштабе всей образовательной среды. Объединение развивающихся в разном темпе структур происходит через синхронизацию их скорости развития. Примером реализации этого принципа в образовании является создание групп, кружков, секций, отрядов из разновозрастных коллективов учеников, объединенных общей целью. В сетевом пространстве — это участие в коллективных учебных проектах. Благодаря согласованным коллективным действиям ученики попадают в один темпомир, начинают развиваться с оптимальной скоростью.

В условиях сетевого пространства процесс восприятия учеником нового материала становится нелинейным. Садясь за компьютер, ученик, не задумываясь, перескакивает с одного на другое, уходит в неизвестное будущее и возвращается в забытое или пропущенное прошлое. Поэтому добиться строгой последовательности и систематичности в освоении социального опыта обучающимися уже не удастся.

Точно так же ученик должен листать и новый учебник. Требование, чтобы все говорящееся в данный момент основывалось на предыдущем, было «понятным» и «объясненным», является несовременным. Когда человек осознает, что он что-то не понимает, и начинает искать сам нужную информацию или задавать учителю вопросы, происходит важнейший этап самобучения.

Главной задачей школы и вуза становится нелинейное упорядочивание информации, приведение ее в систему. Поэтому принцип систематичности в синергетической парадигме педагогики заменяется принципом системности. Этот принцип особенно важен при разработке «фундаментального ядра» содержания образования, т. е. тех элементов, которые как бы «цементируют» картину мира ученика, представляют собой ее узлы, ключевые точки.

Для сетевой парадигмы характерно обучение на основе решения конкретных проблем, что предполагает эклектичность в самостоятельном получении знаний, но более высокую мотивационную обеспеченность. На первый план выдвигается проективное начало, компьютерные сети используются не столько для получения знаний, сколько для сотрудничества, получения опыта профессиональной деятельности. Сфера взаимодействия обучаемых в значительной степени смещается в сферу виртуального пространства Интернета, где они должны совместно решать поставленные перед ними проблемы, а также те проблемы, которые они формулируют самостоятельно.

Для коллективных учебных проектов хорошо подходит Вики-технология. Использование Вики-технологии позволяет вести речь об обучении как процессе создания студентами совместного сетевого контента. В нашей стране технология ВикиВики уже используется рядом вузов как среда сетевого соучастия и организации совместной деятельности обучаемых. Тем самым реализуется принцип обучения в кооперации и сотрудничества в решении учебных и профессиональных проблем. Взаимодействие в виртуальной среде во многом снимает проблемы субъективно-психологического характера, мешающие решению поставленных задач, что в условиях реального общения часто выдвигается на передний план.

Следует заметить, что при использовании сетевых технологий в обучении в целом ряде случаев происходит замена диалога преподавателя и учащихся на пассивное восприятие учащимися презентаций или видеолекций. Все это приводит к обострению проблемы понимания, снижению мотивации и к далеко неоднозначным результатам, которые вызывают определенную тревогу за качество обучения математике [5].

При обучении необходимо создание проблемных ситуаций, т. е. таких ситуаций, при которых происходит осознание некоторого незнания, и одновременно возникает потребность преодоления этого незнания. Такие проблемные ситуации, возникающие в процессе обучения, называются *познавательными проблемными ситуациями*.

Познавательные проблемные ситуации представляют собой конкретный материал (по математике, информатике или по другому предмету), представленный в целостном виде, в котором обозначено противоречие. Этот материал включает факты из изучаемого предмета, содержательные связи между фактами, способы их организации и изучения. Так как понимание по своему характеру диалогично, то разрешение таких ситуаций возможно в диалоге учащийся–преподаватель, учащийся–учащийся. Такой диалог неизбежно возникает в коллективной учебно-проектной деятельности. Поэтому очень важно правильно использовать метод проектов.

Мы будем понимать под методом проектов форму организации учебного процесса, ориентированную на творческую реализацию личности учащегося, развитие его интеллектуальных возможностей, волевых качеств и творческих способностей в процессе создания новых продуктов, обладающих объективной или субъективной новизной, имеющих практическую ценность.

В основе каждого проекта лежит проблема. Проблема проекта обуславливает мотив деятельности, направленной на ее решение. Выбор проблемы — самый сложный и важный момент. Педагогу необходимо направить мысли учащихся на самостоятельный поиск проблемы. Следует понимать, что проблема всегда должна базироваться на противоречии. В дальнейшем стоит уточнить предмет исследования, который отражен в теме проекта и находит свое звучание в ключевом слове заголовка. Целью проектной деятельности становится поиск решения проблемы. Важен момент понимания, осмысления значимости, объема и уровня нерешенных задач. Все это готовит базу для следующих этапов работы над проектом: разработка гипотезы, определение задач, создание собственного варианта решения проблемы, конструирование модели, формирование программы и т. д. На этапе разработки гипотезы учащийся строит предположение, каким образом он будет достигать поставленную цель. Цель проекта и его гипотеза предопределяют задачи проекта. Задачи формулируются как определенные этапы решения общей проблемы, как достижение цели в определенных условиях. На этапе сбора и анализа информации следует обратить внимание на культуру научного поиска. Анализ материалов Интернета, научной, справочной литературы требует умения классифицировать их.

Получив результат проектирования, оформив его в виде продукта, нельзя сказать, что проект завершен. Его необходимо документально оформить и представить к оценке специалистов, заинтересованных лиц, в идеале получить поддержку (финансирование, позитивное общественное мнение) и реализовать на практике (для социальных, практико-ориентированных, исследовательских проектов). Поэтому необходимо добавить к внутренней структуре проекта еще три внешних компонента: портфолио, презентацию, реализацию проекта [1].

Учебный проект тем и отличается от коллективно подготовленного мероприятия с представлением наглядных результатов, что демонстрируется главный результат работы над проектом — анализ деятельности, предъявление способа решения проблемы проекта, предъявление роста своей компетентности участниками проекта. Особенно полезно создание междисциплинарных учебных сетевых проектов, которые реализуются как проекты сетевого сообщества, членами которого могут являться не только студенты, но и выпускники вузов, учителя школ, интересующиеся данной проблематикой.

Необходимый компонент после защиты проекта — рефлексия. Ее следует провести дважды: сразу после окончания презентации, так как это остро эмоциональный момент, когда необходимо подвести первые итоги, и через некоторое время, когда произойдет переосмысление работы, угаснут эмоции. Во втором случае необходимо уже подробно разобрать достоинства и слабые стороны работы, возможности ее продолжения.

Заключение

Современному школьнику и студенту необходимо владеть навыками проектирования. В проектной деятельности развиваются исследовательские умения, обучающиеся учатся презентовать свои знания и навыки, что важно в современном информационном обществе. Вся наша жизнь представляет собой череду различных проектов, поэтому лучше еще в школе научиться их эффективно планировать и успешно реализовать.

Кроме проектной деятельности для создания познавательных учебных ситуаций можно использовать проблемные лекции и проблемные семинары. Проблемные лекции должны дополнять обзорные лекции и посвящаться отдельным, наиболее важным и трудным вопросам изучаемого модуля. Проблемные лекции и проблемные семинары должны предшествовать занятиям-тренингам, их основная цель — добиться понимания студентами узловых вопросов модуля. Проблемные лекции должны читаться наиболее квалифицированными преподавателями. Помимо хорошего владения материалом надо хорошо уметь ставить вопросы. Без вопросов невозможно усвоение новых знаний, обмен мыслями между людьми. Но поставить правильно вопрос зачастую труднее, чем на него ответить.

На практических занятиях следует стремиться к созданию ситуации, инициирующей конструктивное общение студентов друг с другом на основе постановки задачи о нахождении принципиально новой математической информации в сетевом пространстве, сопоставление ее с известной.

В самостоятельной работе студентов при использовании сетевых технологий необходимо использовать задания на определение валидности и достоверности веб-ресурсов (оценить опубликованные материалы, перепроверить изложенные в статье факты, пользуясь другими источниками); на составление аннотированного списка наиболее

интересных, на их взгляд, веб-ресурсов по рассматриваемой тематике; на составление развернутого веб-конспекта на основе математических тезисов, полученных на лекциях.

Следует подчеркнуть, что интенсивное внедрение сетевых технологий в образование — процесс неизбежный. При этом обычно нарушается линейность процесса накопления знаний, сам процесс становится более объемным и трудоемким, появляются параметры глубины и т. п. В этих условиях большую помощь может оказать методология синергетического мировидения, которая создает основу для конструктивного, творческого взаимодействия в обучении разных научных направлений, позволяет получить целостное представление об изучаемых объектах и явлениях.

Литература

1. Голубев О. Б. Интернет-проект в интегрированном курсе «Математика и информатика» для студентов гуманитарных профилей // Вестн. Костромского гос. ун-та им. Н. А. Некрасова. — 2008. — Т. 14, № 3. — С. 271–274.
2. Каган М. С. Формирование личности как синергетический процесс // Синергетическая парадигма. Человек и общество в условиях нестабильности. — М.: Прогресс-Традиция, 2003. — С. 212–227.
3. Князева Е. Н., Курдюмов С. П. Основания синергетики. Синергетическое мировидение. — М.: КомКнига, 2005.
4. Малинецкий Г. Г. Математическое моделирование образовательных систем // Синергетическая парадигма: синергетика образования. — М.: Прогресс-Традиция, 2007. — С. 328–345.
5. Тестов В. А. Обновление содержания обучения математике: исторические и методологические аспекты. — Вологда: Изд-во Вологод. гос. пед. ун-та, 2012. — 176 с.
6. Хакен Г. Тайны природы. Синергетика: учение о взаимодействии. — М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исслед., 2003. — 320 с.
7. Шадриков В. Д. О некоторых теоретических вопросах разработки дидактики для нашей новой школы // Высш. образование сегодня. — 2010. — № 12. — С. 8–11.

Смирнов Никита Евгеньевич
Ярославский государственный педагогический
университет им. К.Д. Ушинского
РОССИЯ, 150000, Ярославль, ул. Республиканская, 108/1
E-mail: e.smirnov@yspu.org

Тестов Владимир Афанасьевич
Вологодский государственный университет
РОССИЯ, 160000, Вологда, ул. Ленина, 15
E-mail: vladafan@inbox.ru;

NETWORK TECHNOLOGIES IN EDUCATION: TRANSITION TO A SYNERGETIC PARADIGM

Smirnov N. E., Testov V. A.

The article is devoted to the problem of using network technologies in education. It is shown that a network educational space is a complex open self-organizing system. Therefore, network technologies can be used effectively only if they rely on the principles of synergy. The most important means of implementation of the synergetic approach in education are educational network projects designed to solve the cognitive problem situations.

Key words: network technologies, self-organization, self-education, chaos, principles of synergy, coherence, openness, joint project activities, network projects, problem situations.

I. Математический анализ и его приложения

К АНАЛИЗУ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ОСНОВЕ ФРАКТАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ¹

А. А. Аливердиев, Э. Н. Ахмедов,
В. Д. Бейбалаев, Р. А. Магомедов,
Р. П. Мейланов, Р. Р. Мейланов

Исходя из обобщения равновесной термодинамики на случай производных дробного порядка, выведено однопараметрическое уравнение состояния и с его помощью получены аналитические выражения для термодинамических характеристик вещества.

Ключевые слова: термодинамика, дробное исчисление, фрактальное уравнение состояния, сжимаемость, энтропия, теплоемкость.

Введение

Интерес к выводу уравнений состояния связан, с одной стороны, с получением все новых веществ и их композиций, с другой — применением таких веществ в широкой области изменения термодинамических параметров температуры, давления и объема с охватом экстремальных состояний [1–7]. Можно отметить два направления вывода уравнения состояния. Одно направление основано на применении методов статистической физики, когда учитывается природа потенциала взаимодействия частиц [8–10]. Эти уравнения содержат минимальное число параметров, имеющих ясный физический смысл. В силу сложной природы взаимодействия между частицами приходится допустить ряд предположений, которые ограничивают область применения полученных уравнений состояния. Второе направление

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-08-00067.

основано на применении массива экспериментальных данных для построения многопараметрического уравнения состояния [11]. По своей сути определяется конечный степенной ряд, с помощью которого строят экспериментально определенную термодинамическую поверхность. При таком подходе достигается лучшее согласие с экспериментом, однако зачастую теряется физический смысл подгоночных параметров. В этой связи в последнее время наблюдаются интенсивные исследования по обобщению как равновесной, так и неравновесной термодинамики, и статистической физики, в частности, с применением дробного исчисления [12–15]. Особенность этого подхода заключается в том, что в теорию вносится новый параметр α — показатель производной дробного порядка. В настоящей работе метод дробного исчисления в равновесной термодинамике используется для вывода фрактального уравнения состояния для многокомпонентных веществ.

1. Равновесная термодинамика в дробном исчислении

Предложенное в работе [13] обобщение термодинамики на основе дробного исчисления привлекательно тем, что операция дробного дифференцирования, представляя собой определенное сочетание обычных операций дифференцирования и интегрирования, вносит в теорию новый параметр α — показатель производной дробного порядка.

Отметим, что в случае рассмотрения неравновесных процессов переход к производным дробного порядка открывает новый подход рассмотрения нелокальных свойств, таких как эффект памяти (нелокальность по времени) и пространственных корреляций (нелокальность в пространстве). При этом в теорию вносятся новые параметры — показатели производных дробного порядка, аналога которых в традиционных подходах не существует.

В случае равновесной термодинамики переход к дробным производным по термодинамическим параметрам (температура, объем) также вносит в теорию новый параметр — показатель производной дробного порядка α с нетривиальным физическим смыслом, который неявно учитывает нелокальность интеграла столкновений, при-

водя тем самым к расширению области применимости полученного однопараметрического семейства уравнений состояния — фрактального уравнения состояния.

Связь между различными функциями состояний — термодинамическими потенциалами — осуществляется преобразованием Лежандра. С помощью преобразований Лежандра можно получить термодинамические потенциалы от разных пар независимых термодинамических переменных и определить связь термодинамических параметров с соответствующими производными от термодинамических потенциалов. Например, исходя из выражения для полного дифференциала внутренней энергии системы $E(V, S)$

$$dE = -PdV + TdS, \quad (1)$$

где E — внутренняя энергия системы, P , V — давление и объем, T , S — температура и энтропия, с помощью преобразования Лежандра для пары термодинамических переменных T , S , которое имеет вид

$$d(TS) = TdS + SdT, \quad (2)$$

можно ввести потенциал Гельмгольца $F = E - TS$. Полный дифференциал потенциала Гельмгольца имеет вид

$$dF = -PdV - TdS.$$

Для обобщения преобразования Лежандра на случай производных дробного порядка исходим из выражения для полного дифференциала дробного порядка от функции двух переменных $L(x, y)$:

$$d^\alpha L(x, y) = \frac{\partial^\alpha L(x, y)}{\partial x^\alpha} \tilde{d}x^\alpha + \frac{\partial^\alpha L(x, y)}{\partial y^\alpha} \tilde{d}y^\alpha,$$

где производные дробного порядка определены как (см. [16])

$$\frac{\partial^\alpha L(x, y)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{L(\xi, y)}{(x-\xi)^\alpha} d\xi, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

$\Gamma(z)$ — Гамма функция Эйлера, $\tilde{d}x^\alpha = \frac{(dx)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ — «обобщенное» бесконечно малое приращение независимой переменной. Более подробный

вывод приведен в [13]. В результате получим

$$d^\alpha(TS) = \frac{T^{1-\alpha}S}{\Gamma(2-\alpha)} dT^\alpha + \frac{TS^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dS^\alpha. \quad (3)$$

Таким образом, выражения для полного дробного дифференциала внутренней энергии и потенциала Гельмгольца принимают вид

$$d^\alpha E = -\frac{PV^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dV^\alpha + \frac{TS^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dS^\alpha, \quad (4)$$

$$d^\alpha F = -\frac{PV^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dV^\alpha - \frac{ST^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dT^\alpha. \quad (5)$$

Аналогичные выражения можно получить и для остальных термодинамических потенциалов. С помощью выражений (4), (5) можно получить соотношения Максвелла, обобщенные на случай дробного исчисления:

$$\left(\frac{\partial^\alpha E}{\partial V^\alpha}\right)_S = -\frac{PV^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad \left(\frac{\partial^\alpha E}{\partial S^\alpha}\right)_V = \frac{TS^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial^\alpha F}{\partial V^\alpha}\right)_T = -\frac{PV^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad \left(\frac{\partial^\alpha F}{\partial T^\alpha}\right)_V = -\frac{ST^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}. \quad (7)$$

Термодинамические соотношения также обобщаются в дробном исчислении:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha C_V}{\partial V_T^\alpha} &= T^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial T_V^\alpha} \left(-\frac{\Gamma(2-\alpha)}{T^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha}{\partial V_T^\alpha} \frac{\partial^\alpha F}{\partial T_V^\alpha} \right) = \\ &= T^\alpha V^{1-\alpha} \frac{\partial^\alpha}{\partial T_V^\alpha} \left(\frac{1}{T^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha P}{\partial V_T^\alpha} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha S}{\partial V_T^\alpha} &= \frac{\partial^\alpha}{\partial V_T^\alpha} \left(-\frac{\Gamma(2-\alpha)}{T^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha F}{\partial T_V^\alpha} \right) = \\ &= -\frac{\Gamma(2-\alpha)}{T^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha}{\partial T_V^\alpha} \left(\frac{\partial^\alpha F}{\partial V_T^\alpha} \right) = \frac{V^{1-\alpha}}{T^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha P}{\partial T_V^\alpha}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь и далее для удобства будем использовать следующее обозначение для производных по термодинамическим параметрам:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \equiv \frac{\partial F}{\partial T_V}.$$

Следует особо отметить, что при $\alpha = 1$ выражения (8), (9) представляют собой традиционные соотношения

$$\frac{\partial C_V}{\partial T} = T \frac{\partial^2 P}{\partial T_V^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial S}{\partial T} = T \frac{\partial P}{\partial T_V},$$

и, таким образом, равновесная термодинамика непротиворечивым образом обобщается на случай применения формализма дробного исчисления. При этом в теорию вносится новый параметр α — показатель производной дробного порядка.

2. Фрактальное уравнение состояния

При выводе уравнения состояния используется соотношение

$$\left(\frac{\partial^\alpha F}{\partial V^\alpha}\right)_T = -\frac{PV^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

Откуда имеем

$$P = -\frac{\Gamma(2-\alpha)}{V^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha F}{\partial V_T^\alpha}, \quad (10)$$

где $F = -kT \ln Z$ — потенциал Гельмгольца,

$$Z = \sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right)$$

— статистическая сумма.

Статистическая сумма в общем случае дается выражением [9, 10]

$$Z = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N} N!} \int \dots \int dp_1 \dots dp_N dr_1 \dots dr_N \exp\left(-\frac{H}{kT}\right),$$

где N — число частиц в системе, p — импульс частицы, r — координата частицы, \hbar — постоянная Планка, H — Гамильтониан.

Для потенциала Гельмгольца в приближении парного взаимодействия имеем

$$F = kT \left\{ \ln \left(\frac{V^N}{N! \Lambda^{3N}} \right) + \ln \left(1 - \frac{N}{V} \sum_{i=1}^3 x_i B_i - \frac{N}{V} \sum_{i<j=1}^3 x_{ij} B_{ij} \right) \right\}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), получим следующее уравнение состояния:

$$P = kT \frac{\Gamma(2-\alpha)}{V^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha}{\partial V^\alpha} \left[\ln \left(\frac{V^N}{N! \Lambda^{3N}} \right) + \ln \left(1 - \frac{N}{V} \sum_{i=1}^3 x_i B_i - \frac{N}{V} \sum_{i<j=1}^3 x_{ij} B_{ij} \right) \right].$$

Вычисляем производную дробного порядка от первого слагаемого, используя при этом интеграл [18]

$$\int_0^\alpha \frac{x^{\alpha-1} \ln x}{(a^\mu - x^\mu)^{1-\beta}} dx = a^{\alpha+\mu(\beta-1)} B\left(\beta, \frac{\alpha}{\mu}\right) [\mu \ln a + \psi(1) - \psi(2-\alpha)],$$

где $a, \mu, \operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > 0$; $\operatorname{Re} \beta > 1$ при $\alpha = 1$, $B(x, y)$ — бета-функция Эйлера, $\psi(x)$ — пси-функция, получим

$$P = \frac{NkT}{V} \left\{ 1 + (1-\alpha) \left[\ln \left(\frac{eV}{N} \left[\frac{m_1^x m_2^y m_3^z kT}{2\pi \hbar^2} \right]^{\frac{3}{2}} \right) + \psi(1) - \psi(2-\alpha) \right] \right\} + kT \frac{\Gamma(2-\alpha)}{V^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha}{\partial V^\alpha} \left[\ln \left(1 - \frac{A(T)}{V} \right) \right], \quad (12)$$

где

$$A(T) = N \left(\sum_{i=1}^3 x_i B_i + \sum_{i<j}^3 x_{ij} B_{ij} \right).$$

Для расчета производной дробного порядка во втором слагаемом заметим, что параметр $\frac{A(T)}{V} \ll 1$. Поэтому, полагая

$$\ln \left(1 - \frac{A(T)}{V} \right) \approx - \ln \left(1 + \frac{A(T)}{V} \right)$$

и воспользовавшись соотношением

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} \ln(x+b)}{(x+a)^{\rho}} dx = a^{\alpha-\rho} B(\alpha, \rho-\alpha) \left[\ln b + \psi(\rho) - \right. \\ \left. - \psi(\rho-\alpha) - \frac{\alpha}{\rho} (1-ab^{-1}) {}_3F_2(\alpha+1, 1, 1; 2, \rho+1; 1-ab^{-1}) \right], \quad (13)$$

где ${}_3F_2(a, d, c; d, e; z)$ — гипергеометрический ряд [18], получим

$$P = \frac{NkT}{V} \left\{ 1 + (1-\alpha) \left[\ln \left(\frac{eV}{N} \left[\frac{m_1^x m_2^y m_3^z kT}{2\pi\hbar^2} \right]^{\frac{3}{2}} \right) + \psi(1) - \right. \right. \\ \left. \left. - \psi(2-\alpha) \right] \right\} + \frac{kT}{V} \left\{ \frac{\frac{A}{V}}{1+\frac{A}{V}} - (1-\alpha) \left[\ln \left(1 + \frac{A}{V} \right) + \psi(2-\alpha) - \psi(1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\frac{A}{V}}{\left(1+\frac{A}{V}\right)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{A}{V}\right)^{-n}}{n+1} + \frac{1-\alpha}{\left(1+\frac{A}{V}\right)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{A}{V}\right)^{-n}}{(n+2-\alpha)(n+1)} \right] \right\}. \quad (14)$$

Отметим, что входящие в (14) ряды сходятся в силу малости параметра $\left(1 + \frac{A}{V}\right)^{-1}$. Ограничиваясь линейными по малому параметру $\left(1 + \frac{A}{V}\right)^{-1}$ членами и используя обозначение $A(T) = NB(T)$, получим

$$P = \frac{NkT}{V} \left\{ 1 + \frac{\frac{B(T)}{V}}{1 + \frac{NB(T)}{V}} + (1-\alpha) \left[\ln \left(\frac{eV}{N} \left[\frac{m_1^x m_2^y m_3^z kT}{2\pi\hbar^2} \right]^{\frac{3}{2}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \psi(1) - \psi(2-\alpha) - \frac{1}{N} \left(\ln \left(1 + \frac{A}{V} \right) + \psi(2-\alpha) - \psi(1) \right) \right] \right\},$$

где

$$B(T) = \sum_{i=1}^3 x_i B_i + \sum_{i<j}^3 x_{ij} B_{ij}$$

— обобщенный второй вириальный коэффициент.

Далее оставим линейные по малому параметру $\frac{B(T)}{V} < 1$ члены и, пренебрегая малыми членами $\frac{1}{N}$, окончательно получим следующее

уравнение состояния:

$$P = \frac{NkT}{V} \left\{ 1 + \frac{B(T)}{V} + (1 - \alpha) \left[\ln \left(\frac{eV}{N} \left[\frac{m_1^x m_2^y m_3^z kT}{2\pi\hbar^2} \right]^{\frac{3}{2}} \right) + \psi(1) - \psi(2 - \alpha) - \frac{B(T)}{V} \right] \right\}. \quad (15)$$

При $\alpha = 1$ уравнение состояния (15) совпадает с традиционным уравнением состояния.

3. Расчет энтропии и теплоемкости

Исходя из температурной зависимости второго вириального коэффициента $B(T) = (b - \frac{a}{kT})$ [10], потенциал Гельмгольца приводится к виду

$$F(V, T) = -kT \left[N \frac{3}{2} \ln(qT) + \ln \left(d + \frac{\tilde{a}}{T} \right) \right],$$

где

$$q = \left(\frac{eV}{N} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{m_x m_y m_z k}{2\pi\hbar^2}, \quad d = 1 - \frac{b}{V}, \quad \tilde{a} = \frac{a}{Vk}.$$

Отсюда согласно (7) энтропия может быть рассчитана как

$$\begin{aligned} S &= - \frac{\Gamma(2 - \alpha)}{T^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha F(T, V)}{\partial T_V^\alpha} = \\ &= k \frac{\Gamma(2 - \alpha)}{T^{1-\alpha}} \frac{\partial^\alpha}{\partial T_V^\alpha} \left[N \frac{3}{2} \ln(qT) + \ln \left(d + \frac{\tilde{a}}{T} \right) \right]. \end{aligned}$$

Снова воспользовавшись известным соотношением (13), оставляя в сумме рядов члены первого порядка по малому параметру $\frac{d}{d + \frac{\tilde{a}}{T}} \ll 1$ и далее с точностью до членов первого порядка по малому параметру $\frac{A(T)}{V} \ll 1$, окончательно получим

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{2} Nk \left[\frac{1}{2 - \alpha} + \ln qT + \psi(2) - \psi(3 - \alpha) \right] - \\ &- Nk \left[\frac{Nb}{V} - (1 - \alpha) \frac{5 - 2\alpha}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)} \frac{Na}{VkT} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что при $\alpha = 1$ (16) совпадает с известным результатом

$$S = \frac{3}{2} Nk \left[1 + \ln qT - \frac{2}{3} \frac{Nb}{V} \right].$$

Исходя из определения

$$C_V = T^\alpha \frac{\partial^\alpha S}{\partial T_V^\alpha}$$

и выражения для энтропии, имеем

$$\begin{aligned} C_V = \frac{3}{2} Nk \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} & \left\{ 1 - \frac{2}{3} \frac{Na}{VkT} + (1-\alpha) \times \right. \\ & \times \left(\ln qT - \frac{2}{3} \frac{Nb}{V} \frac{4}{3} \frac{5-\alpha(5-\alpha)}{(2-\alpha)(3-\alpha)} \frac{Na}{VkT} \right) + \\ & \left. + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} [1 + 2(\psi(1) - \psi(2-\alpha))] \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Наличие нового параметра α в уравнении состояния, смысл которого заключается в возможности учета сложной природы потенциала взаимодействия между частицами, позволяет расширить область применимости фрактального уравнения состояния.

Заключение

Таким образом, нами установлено, что исходя из обобщения равновесной термодинамики на случай производных дробного порядка, можно вывести однопараметрическое уравнение состояния и на его основании получить аналитические выражения для термодинамических характеристик вещества. Остановимся на важном вопросе о физическом смысле производной дробного порядка по термодинамическим параметрам. В случае производных дробного порядка по времени и координате их физический смысл очевиден — нелокальность по времени (эффект памяти) и нелокальность по координате (эффект пространственных корреляций) [14, 15]. Заметим, что переход к производным дробного порядка по времени и координате приводит к решениям, соответствующим учету дополнительного взаимодействия. Так, в случае «фрактального» осциллятора при переходе к производным дробного порядка появляются затухающие

решения [19], переход к производным дробного порядка по координате для уравнения функции Грина приводит к появлению дробно-степенного энергетического спектра и соответствует учету дополнительного межчастичного взаимодействия, зависящего от показателя производной дробного порядка [12]. Можно предположить, что переход к производным дробного порядка по термодинамическому параметру соответствует неявному учету нелокальности взаимодействия между частицами. Однако в полной мере этот вопрос еще остается открытым.

Литература

1. *Фортов В. Е.* Уравнения состояния вещества: от идеального газа до кварк-глюонной плазмы. — М.: Физматлит, 2013. — 492 с.
2. *Фортов В. Е., Ломоносов И. В. Я. Б. Зельдович* и проблемы уравнений состояния вещества в экстремальных условиях // *Успехи физ. наук.* — 2014. — Т. 184, № 3. — С. 231–245.
3. *Каплун А. Б., Мешалкин А. Б.* Малопараметрические термические и калорические уравнения состояния реального газа // *Теплофизика высоких температур.* — 2010. — Т. 48, № 5. — С. 692–698.
4. *Нигматулин Р. И., Болотнова Р. Х.* Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Упрощенная форма // *Теплофизика высоких температур.* — 2011. — Т. 49, № 2. — С. 310–313.
5. *Фокин Л. Р., Попов В. Н., Наурзаков С. П.* Уравнение состояния и термодинамические свойства насыщенных и перегретых паров ртути до 1650 К и 125 МПа // *Теплофизика высоких температур.* — 2011. — Т. 49, № 6. — С. 862–871.
6. *Бальхеева Р. К.* Уравнение состояния для сильнопористого вещества // *Теплофизика высоких температур.* — 2015. — Т. 53, № 3. — С. 367–377.
7. *Богданов Ю. А., Губин С. А., Викторов С. Б., Губина Т. В.* Теоретическая модель уравнения состояния двухкомпонентного флюида с потенциалом $\epsilon_{\text{хр-6}}$ на основе теории возмущений // *Теплофизика высоких температур.* — 2015. — Т. 53, № 4. — С. 506–516.
8. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. — М.: Гостехиздат, 1946. — 120 с.
9. *Хилл Т.* Статистическая механика. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 486 с.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. — М.: Наука, 1964. — 568 с.
11. *Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т.* Свойства газов и жидкостей: Справочное пособие / Пер. с англ. под ред. Б. И. Соколова. — Ленинград: Химия, 1982. — 592 с.
12. *Алисултанов З. З., Мейланов Р. П.* Некоторые особенности квантово-статистических систем с энергетическим спектром дробно-степенного типа // *Теоретическая и мат. физика.* — 2012. — Т. 171, № 3. — С. 404–416.

13. Мейланов Р. П., Магомедов Р. А. Термодинамика в дробном исчислении // Инженерно-физ. журн. — 2014. — Т. 87, № 6. — С. 1455–1465.
14. Мейланов Р. П., Шабанова М. Р. Особенности решений уравнения теплопереноса в производных дробного порядка // Журн. технической физики. — 2011. — Т. 81, № 7. — С. 1–6.
15. Meilanov R. P., Shabanova M. R., Akhmedov E. N. Some peculiarities of the solution of the heat conduction equation in fractional calculus // Chaos, Solitons and Fractals. — 2015. — № 75. — P. 29–33.
16. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
17. Magomedov R. A., Meilanov R. P., Akhmedov E. N., Aliverdiev A. A. Calculation of multicomponent compound properties using generalization of thermodynamics in derivatives of fractional order // J. Phys.: Conf. Ser. Proc. of XXXI International Conf. on Equ. of State for Matter. — 2016. — Vol. 774. — (accepted).
18. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981. — 800 с.
19. Мейланов Р. П., Янполов М. С. Особенности фазовой траектории «фрактального» осциллятора // Письма в журн. технической физики. — 2002. — Т. 28, № 1. — С. 67–73.

АЛИВЕРДИЕВ АБУТРАБ АЛЕКСАНДРОВИЧ
Институт проблем геотермии ДНЦ РАН
РОССИЯ, 367030, Махачкала, пр. Шамиля, 39-а;
Дагестанский государственный университет
РОССИЯ, 367025, Махачкала, ул. Магомеда Гаджиева, 43-а
E-mail: aliverdi@mail.ru

АХМЕДОВ ЭНВЕР НАРИМАНОВИЧ
Институт проблем геотермии ДНЦ РАН
РОССИЯ, 367030, Махачкала, пр. Шамиля, 39-а
E-mail: a.e.n@rambler.ru

БЕЙБАЛАЕВ ВЕТЛУГИН ДЖАБРАИЛОВИЧ
Институт проблем геотермии ДНЦ РАН
РОССИЯ, 367030, Махачкала, пр. Шамиля, 39-а;
Дагестанский государственный университет
РОССИЯ, 367025, Махачкала, ул. Магомеда Гаджиева, 43-а
E-mail: kaspjij_03@mail.ru

МАГОМЕДОВ РАМАЗАН АБДУЛЛАЕВИЧ
Институт проблем геотермии ДНЦ РАН
РОССИЯ, 367030, Махачкала, пр. Шамиля, 39-а
E-mail: ramazan_magomedov@rambler.ru

МЕЙЛАНОВ РАШИД РУСЛАНОВИЧ
Институт проблем геотермии ДНЦ РАН
РОССИЯ, 367030, Махачкала, пр. Шамиля, 39-а
E-mail: rmeylanov@gmail.com

TO THE ANALYSIS OF THERMODYNAMIC CHARACTERISTICS
BASED ON THE FRACTAL STATE EQUATION

Aliverdiev A. A., Akhmedov E. N., Beibalaev V. D.,
Magomedov R. A., Meilanov R. P., Meilanov R. R.

Proceeding from the generalization of equilibrium thermodynamics to the case of fractional derivatives we have derived the one-parametric state equation. On this basis, analytical expressions for thermodynamic characteristics of matter are obtained.

Key words: thermodynamics, fractional calculus, fractal equation of state, compressibility, entropy, heat capacity.

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО ЛАПЛАСИАНА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ¹

В. Б. Васильев

Рассматривается дискретный лапласиан в многомерном полупространстве и описывается его ядро в пространстве квадратично интегрируемых функций. Приводится результат об однозначной разрешимости дискретного аналога задачи Дирихле и дискретный аналог формулы Пуассона.

Ключевые слова: дискретный лапласиан, периодическая факторизация, дискретная краевая задача.

1. Введение

1.1. Дискретные (разностные) уравнения возникают, во-первых, при моделировании естественных процессов, а во-вторых, при дискретизации континуальных уравнений для получения приближенных решений. Здесь нас будет интересовать второй аспект и дискретная теория как таковая, более определенно, вопросы разрешимости и корректных постановок краевых задач для дискретных уравнений подобно тому, как это сделано в континуальном случае [1, 2].

1.2. Простейшие дискретные аналоги можно получить из наиболее распространенных дифференциальных операторов и интегральных операторов типа свертки. Дискретные аналоги интегральных операторов типа свертки достаточно подробно рассмотрены в работах [3, 5–7], в которых описаны результаты о разрешимости таких уравнений с помощью периодического аналога краевой задачи Римана [4].

Конечно, дискретные свертки уже рассматривались в математических исследованиях (см., например, [8–10] и цитированную там литературу). Однако сейчас трудно выяснить, с какой целью проводились эти исследования. Со своей стороны автор готов сформулировать программу исследований, малая часть которой представлена в этой заметке.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Липецкой области, проект № 14-41-р-центр-а.

Проблема изучения дискретных сверток очень обширна, и, по мнению автора, должна включать в себя следующие аспекты (учитывая многочисленные физико-технические приложения уравнений в свертках):

- конечное и бесконечное дискретное преобразование Фурье как естественный аналитический инструмент решения уравнений в свертках;
- выбор подходящих дискретных функциональных пространств;
- исследование разрешимости бесконечных дискретных уравнений;
- исследование разрешимости аппроксимирующих их конечных дискретных уравнений;
- сравнение континуальных и бесконечных дискретных уравнений;
- сравнение бесконечных дискретных и конечных дискретных решений.

Это далеко не полный перечень вопросов, который автор намерен рассматривать. Некоторые результаты в этом направлении получены для простейших операторов Кальдерона — Зигмунда (ядро несуммируемо!) и соответствующих уравнений [13, 14], начато исследование дискретных псевдодифференциальных операторов и уравнений [15], которые в известном смысле также можно отнести к категории уравнений в свертках.

Отметим здесь также, что некоторые аспекты теории аппроксимации для дискретных уравнений типа свертки описаны в [11, 12] (приближение бесконечной дискретной свертки конечномерными агрегатами).

1.3. Основная цель этой работы — исследование дискретного лапласиана в полупространстве методом периодической факторизации символа и описание структуры решения дискретного уравнения Лапласа в полупространстве. Как будет показано ниже, эта структура предписывает добавление дополнительных (граничных) условий, при выполнении которых решение становится единственным.

2. Функции дискретного аргумента, дискретное преобразование Фурье и дискретный лапласиан

2.1. На целочисленной решетке \mathbb{Z}^m мы рассматриваем функции дискретного аргумента $u_d(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in \mathbb{Z}^m$, в пространстве $L_p(\mathbb{Z}^m)$, $1 < p < +\infty$, с нормой $\|u_d\|_p = \left(\sum_{\tilde{x} \in \mathbb{Z}^m} |u_d(\tilde{x})|^p\right)^{1/p}$.

2.2. Дискретное преобразование Фурье для функции из $L_1(\mathbb{Z}^m)$ определим формулой

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in \mathbb{Z}^m} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} u_d(\tilde{x}), \quad \xi \in \mathbb{T}^m = [-\pi, \pi]^m,$$

распространив его затем на пространство $L_2(\mathbb{Z}^m)$. Другими словами, функция дискретного аргумента $u_d(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in \mathbb{Z}^m$, интерпретируется как коэффициенты многомерного ряда Фурье функции $\tilde{u}_d(\xi) \in L_2(\mathbb{T}^m)$.

2.3. Дискретный лапласиан мы определим с помощью разделенной разности 2-го порядка, заменив ею частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} &\sim u_d(x_1, \dots, \tilde{x}_k + 2, \dots, x_m) - 2u_d(x_1, \dots, \tilde{x}_k + 1, \dots, x_m) + \\ &+ u_d(x_1, \dots, \tilde{x}_k, \dots, x_m) \equiv \Delta_{x_k}^2 u_d, \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \equiv \Delta u \sim \sum_{k=1}^m \Delta_{x_k}^2 u_d \equiv \Delta_d u_d.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Это не свертка, а разностный оператор в дискретном пространстве.

Применив к последнему выражению дискретное преобразование Фурье, легко получить формулу

$$(F_d(\Delta_d u_d))(\xi) = \left(\sum_{k=1}^m (e^{i\xi_k} - 1)^2 \right) \tilde{u}_d(\xi). \quad (1)$$

Функцию $\Delta_d(\xi) \equiv \sum_{k=1}^m (e^{i\xi_k} - 1)^2$ естественно назвать *символом дискретного лапласиана*. Чтобы не возникало путаницы, в отличие от оператора Δ_d мы у символа проставляем аргумент ξ .

3. Периодическая факторизация

Пусть A_d — линейный ограниченный оператор, действующий в дискретном пространстве $L_2(\mathbb{Z}^m)$. Как правило, с оператором связывают операторное уравнение

$$A_d u_d = v_d, \quad v_d \in L_2(\mathbb{Z}^m), \quad (2)$$

и если структура оператора такова, что к (2) можно применить дискретное преобразование Фурье, сведя его к мультипликатору $\sigma_d(\xi)\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{v}_d(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, то функцию $\sigma_d(\xi)$ называют *символом* оператора A_d . Разумеется, под оператором A_d понимается не произвольный оператор, а только такой, для которого справедливо приведенное мультипликативное представление (это может быть свертка или разностный оператор); в последнем уравнении все функции периодические, так что его можно рассматривать на \mathbb{T}^m .

Факторизация символа [1, 2] применяется в том случае, когда уравнение (2) рассматривается не на всей решетке \mathbb{Z}^m , а на ее части, например на $\mathbb{Z}_+^m = \{\tilde{x} \in \mathbb{Z}^m : \tilde{x}_m \geq 0\}$. Другими словами, вместо (2) рассматривается уравнение

$$P_+ A_d u_d^+ = v_d^+, \quad v_d^+ \in L_2(\mathbb{Z}_+^m), \quad (3)$$

где $P_+ : L_2(\mathbb{Z}^m) \rightarrow L_2(\mathbb{Z}_+^m)$ — проектор, и решение u_d^+ разыскивается в $L_2(\mathbb{Z}_+^m)$.

Здесь и ниже мы рассматриваем дискретные операторы с непрерывными периодическими символами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Символ $\sigma_d(\xi)$ называется *эллиптическим*, если $\inf_{\xi \in \mathbb{T}^m} |\sigma_d(\xi)| > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В нашем случае это эквивалентно тому, что символ нигде не обращается в ноль.

Обозначим $\xi = (\xi', \xi_m)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Периодической факторизацией* эллиптического символа $\sigma_d(\xi)$ называется его представление в виде $\sigma_d(\xi', \xi) = \sigma_d^+(\xi', \xi) \cdot \sigma_d^-(\xi', \xi)$, где $\sigma_d^\pm(\xi)$ допускают ограниченное аналитическое продолжение по переменной ξ_m в полуполосы $\Pi_\pm = \{z \in \mathbb{C} : z = \xi_m + i\tau, \xi_m \in [-\pi, \pi], \pm\tau > 0\}$ при почти всех ξ' .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Индексом периодической факторизации* эллиптического символа $\sigma_d(\xi)$ называется поделенное на 2π приращение аргумента $\sigma_d(\xi)$ при изменении ξ_m от $-\pi$ до π .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Нетрудно сообразить, что индекс факторизации не зависит от ξ' .

Поскольку дискретный лапласиан с символом (1) не является эллиптическим в смысле определения 1, мы здесь будем рассматривать оператор Гельмгольца $H_d \equiv \Delta_d + k^2 I$, где I — единичный оператор, с некоторым фиксированным $k \in \mathbb{R}$ (чтобы символ $\Delta_d(\xi) + k^2$ удовлетворял определению 1).

Лемма 1. Если индекс факторизации дискретного оператора A_d нулевой, то оператор допускает периодическую факторизацию.

Все подробности построения такой факторизации содержатся в [4]. Основную роль играет периодический аналог преобразования Гильберта — оператор вида

$$\left(H_{\xi'}^{per} \tilde{u}_d\right)(\xi) = \frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\eta_m - \xi_m}{2} u_d(\xi', \eta_m) d\eta_m.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Вполне вероятно, что лемма 1 вытекает из теоремы 6 работы И. Б. Симоненко [8], однако для этого потребуются дополнительные исследования. Здесь же это простое следствие теории периодической краевой задачи Римана [4], которая позволяет в дальнейшем рассмотреть и случаи ненулевых индексов.

Лемма 2. Индекс дискретного оператора H_d равен 1.

Этот факт проверяется непосредственно. Действительно, при фиксированном ξ' искомое приращение аргумента будет определяться только членом, содержащим $e^{i\xi_m}$ для любого значения k . Дело в том, что символ дискретного лапласиана не эллиптический, при $\xi = 0$ он обращается в нуль. Легко получить оценку $|\Delta_d(\xi)| \leq 4m$, так что годится, например, любое $k \geq 2\sqrt{m}$.

4. Структура общего решения

Леммы 1 и 2 позволяют описать структуру общего решения уравнения (3) в случае $A_d \equiv H_d$ в пространстве $L_2(\mathbb{Z}_+^m)$, используя методы [1, 2] и теорию периодической задачи Римана [4].

Теорема 1. Для $A_d = H_d$ все решения уравнения (3) содержатся в формуле

$$\tilde{u}_d(\xi) = e^{-i\xi_m} h_+^{-1}(\xi', \xi_m) \left(H_{\xi'}^{per} \left(h_-^{-1} \widetilde{lv_d^+} \right) \right)(\xi) + \tilde{c}(\xi') e^{-i\xi_m} h_+^{-1}(\xi', \xi_m),$$

где $h_{\pm}(\xi', \xi_m)$ — элементы периодической факторизации символа $e^{-i\xi_m}(\Delta_d(\xi) + k^2)$, lv_d^+ — произвольное продолжение v_d^+ на все \mathbb{Z}^m , $c(x')$ — произвольная функция из $L_2(\mathbb{Z}^{m-1})$.

Элементы периодической факторизации строятся по классическим канонам Ф. Д. Гахова и Н. И. Мусхелишвили с заменой одномерного сингулярного интегрального оператора (преобразования Гильберта H на прямой) на оператор $H_{\xi'}^{per}$.

5. Дискретные краевые задачи

В теореме 1 содержится утверждение о неединственности решения уравнения (3). Чтобы выделить единственное решение, требуются дополнительные условия. Чаще всего используется задание граничных условий. Проще всего выглядят дискретные аналоги условий Дирихле или Неймана. Рассмотрим здесь случай дискретных условий Дирихле. Потребуем, чтобы решение уравнения (3) удовлетворяло дискретному условию Дирихле

$$u_d|_{\tilde{x}_m=0} = g_d(\tilde{x}'), \quad (4)$$

где g_d — заданная функция дискретного аргумента на дискретной гиперплоскости Z^{m-1} .

Условие (4) в образах Фурье примет следующий вид:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}_d(\xi', \xi_m) d\xi_m = \tilde{g}_d(\xi'),$$

что с учетом теоремы 1 приводит к следующему интегральному уравнению относительно $\tilde{c}(\xi')$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} c(\xi') e^{-i\xi_m} h_+^{-1}(\xi', \xi_m) d\xi_m = \tilde{f}_d(\xi'),$$

где введено обозначение

$$\tilde{f}_d(\xi') = \tilde{g}_d(\xi') - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\xi_m} h_+^{-1}(\xi', \xi_m) \frac{1}{2} \left(I + H_{\xi'}^{per} \right) \left(h_-^{-1} \widetilde{lv_d^+} \right) (\xi) d\xi_m.$$

Обозначив еще

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\xi_m} h_+^{-1}(\xi', \xi_m) d\xi_m \equiv b(\xi')$$

и предположив, что $b(\xi') \neq 0$, легко найдем $\tilde{c}(\xi') = b^{-1}(\xi') \tilde{f}_d(\xi')$.

Тогда решение задачи (3)–(4) в образах Фурье принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}_d(\xi) = & e^{-i\xi_m} h_+^{-1}(\xi', \xi_m) \left(\frac{1}{2} \left(I + H_{\xi'}^{per} \right) \left(h_-^{-1} \widetilde{lv_d^+} \right) \right) (\xi) + \\ & + b^{-1}(\xi') \tilde{f}_d(\xi') e^{-i\xi_m} h_+^{-1}(\xi', \xi_m). \end{aligned}$$

Теорема 2. Дискретная краевая задача (3)–(4) однозначно разрешима в пространстве $L_2(\mathbb{Z}_+^m)$ при любой правой части $v_d \in L_2(\mathbb{Z}_+^m)$ и любом граничном значении $g_d \in L_2(\mathbb{Z}^{m-1})$.

5.1. Если правая часть уравнения — тождественный ноль, $v_d^+ \equiv 0$, формула для решения дискретной краевой задачи (3)–(4) значительно упрощается $\tilde{u}_d(\xi) = b^{-1}(\xi') \tilde{g}_d(\xi') e^{-i\xi_m} h_+^{-1}(\xi', \xi_m)$, и после применения обратного дискретного преобразования Фурье будет выглядеть так:

$$u_d(\tilde{x}', \tilde{x}_m) = \sum_{\tilde{y}' \in \mathbb{Z}^{m-1}} P_d(\tilde{x}' - \tilde{y}', \tilde{x}_m) g_d(\tilde{y}'), \quad (5)$$

где функция дискретного аргумента $P_d(\tilde{x})$ определяется как обратное дискретное преобразование Фурье функции

$$b^{-1}(\xi') e^{-i\xi_m} h_+^{-1}(\xi', \xi_m).$$

Формула (5) — это дискретный аналог формулы Пуассона для решения задачи Дирихле в полупространстве.

Заключение

С учетом полученных здесь и ранее результатов можно ожидать интересных соответствий между дискретной и непрерывной теорией, которые позволят обосновать получение дискретных решений (пригодных для компьютерных вычислений) различных краевых задач для широкого класса уравнений.

Автор признателен рецензенту за высказанные замечания и пожелания, которые были приняты к сведению и учтены в работе.

Литература

1. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 232 с.
2. Васильев В. Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи / 2-е изд. — М.: КомКнига, 2010. — 135 с.
3. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. Discrete singular integrals in a half-space // Current Trends in Analysis and its Appl. Proc. 9th ISAAC Congress (Kraków, Poland, 2013). — Basel: Birkhäuser, 2015. — P. 663–670.
4. Васильев А. В., Васильев В. Б. Периодическая задача Римана и дискретные уравнения в свертках // Диф. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 5. — С. 642–649.
5. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. Difference and discrete equations on a half-axis and the Wiener–Hopf method // Azerb. J. Math. — 2016. — Vol. 6, № 1. — P. 79–86.

6. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. On solvability of some difference-discrete equations // *Opuscula Mathematica*. — 2016. — Vol. 36, № 4. — P. 525–539.
7. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. Difference equations in a multidimensional space // *Math. Modelling and Analysis*. — 2016. — Vol. 21, № 3. — P. 336–349.
8. Симоненко И. Б. О многомерных дискретных свертках // *Мат. исслед. Кишинев*. — 1968. — Т. 3, № 1 (7). — С. 108–122.
9. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. — М.: Наука, 1971. — 352 с.
10. Симоненко И. Б. Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих. — Ростов н/Д.: Изд-во ЦВВР, 2007. — 120 с.
11. Böttcher A., Silbermann B. *Analysis of Töplitz Operators*. — Berlin: Springer-Verlag, 2006. — 665 p.
12. Didenko V., Silbermann B. *Approximation of Additive Convolution-like Operators. Real C^* -algebra Approach*. — Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser-Verlag, 2008. — 306 p.
13. Васильев А. В., Васильев В. Б. Приближенные решения многомерных сингулярных интегральных уравнений и быстрые алгоритмы их нахождения // *Владикавказ. мат. журн.* — 2014. — Т. 16, вып. 1. — С. 3–11.
14. Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. On finite discrete operators and equations // *Proc. Appl. Math. Mech.* — 2016. — Vol. 16, № 1. — P. 771–772.
15. Vasilyev V. B. Discrete equations and periodic wave factorization // *AIP Conf. Proc.* — 2016. — Vol. 1759. — P. 1–5.

Васильев Владимир Борисович
 Липецкий государственный технический университет
 РОССИЯ, 398600, Липецк, ул. Московская, 30;
 Белгородский государственный национальный
 исследовательский университет
 РОССИЯ, 308007, Белгород, ул. Студенческая, 14/1
 E-mail: vbv57@inbox.ru

ON BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE DISCRETE LAPLACIAN IN THE HALF-SPACE

Vasilyev V. B.

The discrete Laplacian in a multidimensional half-space is considered and its kernel in the space of square integrable functions is described. A result on unique solvability of discrete analogue of the Dirichlet problem and discrete analogue of Poisson formula are obtained.

Key words: the discrete Laplacian, periodic factorization, discrete boundary value problem.

О НЕСТАНДАРТНОЙ ЧАСТИЧНОЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТИ В ТЕОРИИ ДВУМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛИЦА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ

А. Э. Пасенчук

В пространстве измеримых, суммируемых с квадратом на торе функций рассматривается специальный класс операторов Теплица. Устанавливается свойство нестандартной частичной мультипликативности и приводятся некоторые приложения этого свойства.

Ключевые слова: оператор Теплица, нестандартная мультипликативность.

1. Введение

Через C , R , Z обозначим множества комплексных, вещественных, целых чисел соответственно. Положим $Z_+ = \{j \in Z : j \geq 0\}$, $Z_- = \{j \in Z : j < 0\}$, $\Gamma = \{\xi \in C : |\xi| = 1\}$, $\Gamma^2 = \Gamma \times \Gamma$, $D^+ = \{z \in C : |z| < 1\}$, $D^- = \{z \in C : |z| > 1\}$. Будем пользоваться следующими обозначениями для определенных на Γ , Γ^2 функций: $L_2(\Gamma)$, $L_2(\Gamma^2)$ — гильбертовы пространства измеримых суммируемых с квадратом функций; $W(\Gamma)$, $W(\Gamma^2)$ — банаховы алгебры функций, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Будем считать, что в указанных пространствах определены естественные операции и топологии (см., например, [3, 4]). Хорошо известно, что оператор S сингулярного интегрирования вдоль Γ ограничен и инволютивен в пространствах $L_2(\Gamma)$, $W(\Gamma)$. Это обстоятельство позволяет ввести операторы проектирования $P^\pm = \frac{1}{2}(I \pm S)$, действующие в этих пространствах, а также порождаемые ими проекторы в пространствах $W(\Gamma^2)$, $L_2(\Gamma^2)$: $P^{\pm\mp} = P^\pm \otimes P^\mp$, $P^{\pm\bullet} = P^\pm \otimes I$, $P^{\bullet\pm} = I \otimes P^\pm$. Для образов этих проекторов условимся использовать тот же набор «+» и «-», которым обладает соответствующий проектор. Например, $L_2^\pm(\Gamma) = P^\pm(L_2(\Gamma))$, $W^{\pm\bullet}(\Gamma^2) = P^{\pm\bullet}(W(\Gamma^2))$...

Пусть $a(\xi, \eta) \in W(\Gamma^2)$. В пространстве $L_2^{++}(\Gamma^2)$ будем рассматривать теплицев оператор $T_a = P^{++}a(\xi, \eta)I$. При этом функцию $a(\xi, \eta)$ называют *символом оператора* T_a . Наиболее общим результатом для

оператора T_a является критерий нетеровости, полученный И. Б. Симоненко в качестве следствия к разработанному им локальному принципу исследования операторов локального типа [14].

Теорема (теорема Симоненко). *Оператор T_a нетеров в пространстве $L_2^{++}(\Gamma^2)$ тогда и только тогда, когда его символ удовлетворяет условиям:*

- 1) $a(\xi, \eta) \neq 0, (\xi, \eta) \in \Gamma^2$;
- 2) $\text{ind}_\xi a(\xi, \eta) = \text{ind}_\eta a(\xi, \eta) = 0$.

При выполнении этих условий индекс оператора T_a равен нулю.

Отметим, что при выполнении условий теоремы символ $a(\xi, \eta) \in W(\Gamma^2)$ допускает факторизацию (см. [6])

$$a(\xi, \eta) = a^{--}(\xi, \eta)a^{+-}(\xi, \eta)a^{-+}(\xi, \eta)a^{++}(\xi, \eta),$$

где $a^{\pm\mp} \in GW^{\pm\mp}(\Gamma^2)$. Из этого представления следует, что $T_a = T_{a^{--}}T_{a^{-+}a^{+-}}T_{a^{++}}$, и, хотя операторы $T_{a^{--}}$, $T_{a^{++}}$ и обратимы, оператор $T_{a^{-+}a^{+-}}$, в отличие от одномерного случая, не проще, чем исходный оператор T_a . Отметим, что приведенное свойство двумерного теплицева оператора называют частичной мультипликативностью. В последующих исследованиях этот результат в серии работ В. С. Пилиди [9], В. С. Пилиди и Л. И. Сазонова [10, 11], Л. И. Сазонова [13], а также Р. Г. Дугласа и Р. Хоува, [5] и др. был обобщен в различных направлениях. Работы И. Б. Симоненко и его последователей посвящены качественному исследованию и практически не содержат никаких конструкций, исключая конструкции регуляризаторов. Однако имеются и некоторые работы, посвященные конструктивному подходу при исследовании двумерного оператора Теплица. Укажем некоторые из этих работ. В. С. Рабинович [12] заметил, что если в факторизации символа отсутствует $a^{-+}(\xi, \eta)$ или $a^{+-}(\xi, \eta)$, то оператор T_a обратим. Л. И. Сазонов обобщил этот результат на случай, когда $a^{+-}(\xi, \eta) = (1 - \alpha^+(\xi)\eta^{-1})^{-1}$, $|\alpha^+(\xi)| < 1$, $\xi \in \Gamma$. В работах С. Ошера [7], В. А. Малышева [6], А. Беттхера [1], А. Беттхера, А. Э. Пасенчука [2, 8] рассмотрены двумерные операторы Теплица со специальными символами. В этих работах показано, что нетеровость рассматриваемых операторов равносильна их обратимости и предприняты попытки построения решений соответствующих уравнений. В работе Р. Г. Дугласа и Р. Хоува [5] приведен пример, показывающий, что нетеровость двумерных операторов Теплица не равносильна их обратимости.

Мы рассматриваем нетеров оператор $T_a : L_2^{++}(\Gamma^2) \rightarrow L_2^{++}(\Gamma^2)$, символ которого допускает одно из представлений $a(\xi, \eta) = \xi^{\mp n} a^{\pm \bullet}(\xi, \eta)$, где $a^{\pm \bullet}(\xi, \eta) \in W^{\pm \bullet}(\Gamma^2)$, а n — натуральное число. Для таких операторов устанавливается свойство нестандартной частичной мультипликативности, состоящее в том, что некоторому мультипликативному представлению символа отвечает мультипликативное представление операторов Теплица. Однако порядок следования элементарных операторов Теплица в этом представлении отличается от стандартного. Приводятся некоторые приложения этого результата.

2. Нестандартная частичная мультипликативность

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть $a^{\pm \pm}(\xi, \eta) \in W^{\pm \pm}(\Gamma^2)$, а $a_0(\xi, \eta) \in W(\Gamma^2)$. Тогда если $a(\xi, \eta) = a^{--}(\xi, \eta)a_0(\xi, \eta)a^{++}(\xi, \eta)$, то имеет место равенство $T_a = T_{a^{--}}T_{a_0}T_{a^{++}}$.

◁ Для любых пар $(m, n) \in Z_+^2$, $(k, j) \in Z_+^2$, $(p, q) \in Z^2$ имеет место равенство $T_{\xi^{p+k-m}\eta^{q+j-n}} = T_{\xi^{-m}\eta^n}T_{\xi^p\eta^q}T_{\xi^k\eta^j}$, легко проверяемое непосредственно. Умножая равенства такого вида на подходящие константы, суммируя и переходя к пределу, получим доказываемое. ▷

Лемма 2. Пусть $a^{-\bullet}(\xi, \eta) \in W^{-\bullet}(\Gamma^2)$, $a^{\bullet+}(\xi, \eta) \in W^{\bullet+}(\Gamma^2)$. Тогда если $a(\xi, \eta) = a^{-\bullet}(\xi, \eta)a^{\bullet+}(\xi, \eta)$, то $T_a = T_{a^{-\bullet}}T_{a^{\bullet+}}$.

◁ Лемма 2 доказывается аналогично лемме 1. ▷

Свойства оператора Теплица, указанные в леммах 1, 2, называют *частичной мультипликативностью*. Оказывается, что для некоторых классов символов справедливы аналогичные, но отличающиеся от приведенных утверждения. Точнее говоря, мультипликативным представлениям символов отвечают мультипликативные представления операторов Теплица, но последовательность, в которой выписываются операторы Теплица, соответствующие сомножителям в представлении символа, отличаются от тех, что указаны в леммах 1, 2. Такие свойства двумерных операторов Теплица мы будем называть *нестандартной частичной мультипликативностью*.

Теорема 1. Если функция $a^{+\bullet}(\xi, \eta) \in W^{+\bullet}(\Gamma^2)$ допускает представление $a^{+\bullet}(\xi, \eta) = a^{--}(\xi, \eta)a^{+-}(\xi, \eta)a^{-+}(\xi, \eta)a^{++}(\xi, \eta)$, где $a^{\pm \pm}(\xi, \eta) \in W^{\pm \pm}(\Gamma^2)$, то $T_{a^{+\bullet}} = T_{a^{+-}}T_{a^{--}}T_{a^{-+}}T_{a^{++}}$.

◁ Предположим сначала, что $a^{+-}(\xi, \eta) \in GW^{+-}(\Gamma^2)$ и пусть $b^{+-}(\xi, \eta) = (a^{+-}(\xi, \eta))^{-1} \in W^{+-}(\Gamma^2)$. Тогда, очевидно, имеет место равенство $b^{+-}(\xi, \eta)a^{+\bullet}(\xi, \eta) = a^{--}(\xi, \eta)a^{-+}(\xi, \eta)a^{++}(\xi, \eta)$. Отсюда, пользуясь леммами 1, 2, получаем $T_{b^{+-}}T_{a^{+\bullet}} = T_{b^{+-}a^{+\bullet}} = T_{a^{--}a^{-+}a^{++}} = T_{a^{--}T_{a^{-+}}T_{a^{++}}}$. При этом оператор $T_{b^{+-}}$ обратим и $(T_{b^{+-}})^{-1} = T_{a^{+-}}$, поэтому, умножая равенство $T_{b^{+-}}T_{a^{+\bullet}} = T_{a^{--}T_{a^{-+}}T_{a^{++}}}$ слева на $T_{a^{+-}}$, получим доказываемое равенство в рассматриваемом случае. В общем случае подберем и зафиксируем достаточно большое число $\lambda \in C$ так, чтобы функция $a^{+-}(\xi, \eta) + \lambda \in GW^{+-}(\Gamma^2)$. По доказанной части теоремы имеем $T_{a^{+\bullet}} = T_{(a^{+-}+\lambda)}T_{a^{--}T_{a^{-+}}T_{a^{++}}}$, где $a^{+\bullet}_\lambda = a^{--}(a^{+-}+\lambda)a^{-+}a^{++}$. С одной стороны, очевидно, $a^{+\bullet}_\lambda = a^{+\bullet} + \lambda a^{--}a^{-+}a^{++}$, поэтому отсюда получаем $T_{a^{+\bullet}_\lambda} = T_{a^{+\bullet}} + \lambda T_{a^{--}a^{-+}a^{++}} = T_{a^{+\bullet}} + \lambda T_{a^{--}T_{a^{-+}}T_{a^{++}}}$. С другой стороны, $T_{a^{+\bullet}_\lambda} = T_{(a^{+-}+\lambda)}T_{a^{--}T_{a^{-+}}T_{a^{++}}} = T_{a^{+-}T_{a^{--}T_{a^{-+}}T_{a^{++}}} + \lambda T_{a^{--}T_{a^{-+}}T_{a^{++}}}$. Из последних двух равенств вытекает утверждение теоремы. ▷

Теорема 2. Если функция $a^{-\bullet}(\xi, \eta) \in W^{-\bullet}(\Gamma^2)$ допускает представление $a^{-\bullet}(\xi, \eta) = a^{--}(\xi, \eta)a^{+-}(\xi, \eta)a^{-+}(\xi, \eta)a^{++}(\xi, \eta)$, где $a^{\pm\pm}(\xi, \eta) \in W^{\pm\pm}(\Gamma^2)$, то $T_{a^{-\bullet}} = T_{a^{--}T_{a^{+-}}T_{a^{-+}}T_{a^{++}}}$.

◁ Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. ▷

Следствие 1. Если функция $a(\xi, \eta) = \xi^{-n}a^{+\bullet}(\xi, \eta)$ удовлетворяет условиям теоремы И. Б. Симоненко и $a(\xi, \eta) = a^{--}(\xi, \eta)a^{+-}(\xi, \eta)a^{-+}(\xi, \eta)a^{++}(\xi, \eta)$ — ее каноническая факторизация в алгебре $W(\Gamma^2)$, то имеет место равенство $T_a = T_{\xi^{-n}}T_{a^{+-}}T_{a^{--}}T_{a^{-+}}T_{a^{++}}T_{\xi^n}$.

Следствие 2. Если функция $a(\xi, \eta) = \xi^n a^{-\bullet}(\xi, \eta)$ удовлетворяет условиям теоремы И. Б. Симоненко и $a(\xi, \eta) = a^{--}(\xi, \eta)a^{+-}(\xi, \eta)a^{-+}(\xi, \eta)a^{++}(\xi, \eta)$ — ее каноническая факторизация в алгебре $W(\Gamma^2)$, то имеет место равенство $T_a = T_{\xi^{-n}}T_{a^{--}}T_{a^{+-}}T_{a^{++}}T_{a^{-+}}T_{\xi^n}$.

3 Оператор Теплица с символом

$$a(\xi, \eta) = \xi^{-1}a_{-1}(\eta) + a_0(\eta) + \xi a_1(\eta)$$

Пусть $b(\xi, \eta) = b_0(\eta) + b_1(\eta)\xi + b_2(\eta)\xi^2$, где $b_0(\eta), b_1(\eta), b_2(\eta) \in W(\Gamma)$ и функции $b_0(\eta), b_2(\eta)$ не являются тождественными нулями. Нас будут интересовать корни уравнения $b(\xi, \eta) = 0$ в предположении, что

переменная $\eta \in \Gamma$ фиксирована. Ясно, что имеются два кривых корня $\xi = \xi_1(\eta)$, $\xi = \xi_2(\eta)$, определяемые по стандартным формулам. Однако эти корни не обязаны обладать, вообще говоря, никакими свойствами непрерывности или гладкости по переменной $\eta \in \Gamma$. Оказывается, что при некоторых дополнительных условиях о кривых $\xi = \xi_1(\eta)$, $\xi = \xi_2(\eta)$ можно утверждать, что они обладают в некотором смысле такими свойствами. Например, имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $b(\xi, \eta) \neq 0$, $(\xi, \eta) \in \Gamma^2$ и $\text{ind}_\xi b(\xi, \eta) = 1$, тогда кривые нулей $\xi = \xi_1(\eta)$, $\xi = \xi_2(\eta)$ таковы, что $|\xi_1(\eta)| < 1$ ($\forall \eta \in \Gamma$), $|\xi_2(\eta)| > 1$ ($\forall \eta \in \Gamma$) и $\xi_1(\eta) \in W(\Gamma)$, $\xi_2^{-1}(\eta) \in W(\Gamma)$.

◁ В самом деле, поскольку $\text{ind}_\xi b(\xi, \eta) = 1$, то по формуле для индекса мероморфной функции имеем, что при любом фиксированном $\eta \in \Gamma$ корни уравнения $b(\xi, \eta) = 0$ удовлетворяют неравенствам $|\xi_1(\eta)| < 1$ ($\forall \eta \in \Gamma$), $|\xi_2(\eta)| > 1$ ($\forall \eta \in \Gamma$). Тогда в силу известной формулы для подсчета контурных интегралов получаем

$$\begin{aligned} \xi_1(\eta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \xi b'_\xi(\xi, \eta) (b(\xi, \eta))^{-1} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (2b_2(\eta)\xi^2 + b_1(\eta)\xi) (b(\xi, \eta))^{-1} d\xi. \end{aligned}$$

Поскольку $b(\xi, \eta) \neq 0$, $(\xi, \eta) \in \Gamma^2$, то в силу теоремы Вине-ра $(b(\xi, \eta))^{-1} \in W(\Gamma^2)$. Пусть $(b(\xi, \eta))^{-1} = \sum_{(k,j) \in \mathbb{Z}^2} c_{kj} \xi^k \eta^j$. Тогда $\xi_1(\eta) = 2b_2(\eta)c_{-3}(\eta) + b_1(\eta)c_{-2}(\eta) \in W(\Gamma)$, где $c_k(\eta) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{kj} \eta^j$.

Поскольку $b(\xi, \eta) = (\xi - \xi_1(\eta))(b_2(\eta)\xi + (b_1(\eta) + b_2(\eta)\xi_1(\eta)))$, то из условий леммы следует, что $|b_2(\eta)| < |b_1(\eta) + b_2(\eta)\xi_1(\eta)|$. В частности, $b_1(\eta) + b_2(\eta)\xi_1(\eta) \neq 0$, $\eta \in \Gamma$, и поэтому $(b_1(\eta) + b_2(\eta)\xi_1(\eta))^{-1} \in W(\Gamma)$. Тогда для функции $b(\xi, \eta)$ имеет место представление $b(\xi, \eta) = d(\eta)(\xi - \xi_1(\eta))(1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi)$, где $d(\eta) = (b_1(\eta) + b_2(\eta)\xi_1(\eta))$, $\xi_2^{-1}(\eta) = -b_2(\eta)(b_1(\eta) + b_2(\eta)\xi_1(\eta))^{-1}$. По построению $\xi_2^{-1}(\eta) = -b_2(\eta)(b_1(\eta) + b_2(\eta)\xi_1(\eta))^{-1} \in W(\Gamma)$. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ. В представлении $b(\xi, \eta) = d(\eta)(\xi - \xi_1(\eta))(1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi)$ квадратного трехчлена, удовлетворяющего условиям леммы 1, $d(\eta) \neq 0$, $\eta \in \Gamma$, и $\text{ind}_\eta d(\eta) = \text{ind}_\eta b(\xi, \eta)$.

Рассмотрим многочлен $p(\xi, \eta) = \xi a(\xi, \eta) = a_{-1}(\eta) + a_0(\eta)\xi + a_1(\eta)\xi^2$. Очевидно, $p(\xi, \eta) \neq 0$, $(\xi, \eta) \in \Gamma^2$ и $\text{ind}_{\xi \in \Gamma} p(\xi, \eta) = 1$,

$\text{ind}_{\eta \in \Gamma} p(\xi, \eta) = 0$. Согласно лемме 1 и замечанию к ней найдутся функции $\xi = \xi_1(\eta)$, $\xi = \xi_2(\eta)$ такие, что $|\xi_1(\eta)| < 1$ ($\forall \eta \in \Gamma$), $|\xi_2(\eta)| > 1$ ($\forall \eta \in \Gamma$), $\xi_1(\eta) \in W(\Gamma)$, $\xi_2^{-1}(\eta) \in W(\Gamma)$, и при этом имеет место равенство $p(\xi, \eta) = d_0(\eta)(\xi - \xi_1(\eta))(1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi)$. Отметим, что $d(\eta) \in W(\Gamma)$, $d(\eta) \neq 0$, $\eta \in \Gamma$ и $\text{ind}_{\eta} d(\eta) = \text{ind}_{\eta} p(\xi, \eta) = 0$. Хорошо известно (см., например, [3]), что при выполнении последних условий функция $d(\eta)$ допускает каноническую факторизацию в алгебре $W(\Gamma)$: $d(\eta) = d^-(\eta)d^+(\eta)$, где $d^{\pm}(\eta) \in GW^{\pm}(\Gamma)$. Принимая во внимание приведенные факты, представим рассматриваемый символ в следующем виде: $a(\xi, \eta) = d^-(\eta)(1 - \xi_1(\eta)\xi^{-1})(1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi)d^+(\eta)$. Тогда в силу свойства частичной мультипликативности $T_a = T_{d^-(\eta)}T_{(1-\xi_1(\eta)\xi^{-1})(1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi)}T_{d^+(\eta)}$. Поскольку операторы $T_{d^-(\eta)}$, $T_{d^+(\eta)}$ обратимы, и при этом $(T_{d^-(\eta)})^{-1} = T_{(d^-(\eta))^{-1}}$, $(T_{d^+(\eta)})^{-1} = T_{(d^+(\eta))^{-1}}$, то поведение оператора T_a определяется поведением оператора $T_{(1-\xi_1(\eta)\xi^{-1})(1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi)}$, который мы и будем рассматривать ниже. В связи с этим будем сам оператор называть *модельным*, а его символ — *модельным символом*. Отметим, что операторы Теплица $T_{1-\xi_1(\eta)\xi^{-1}}$, $T_{1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi}$ обратимы, и при этом

$$T_{1-\xi_1(\eta)\xi^{-1}} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} (P^{++} (1 - \xi_1(\eta)\xi^{-1}) P^{++})^j,$$

$$T_{1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} (P^{++} (1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi) P^{++})^j.$$

Пусть

$$(1 - \xi_1(\eta)\xi^{-1}) (1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi) = a^{--}(\xi, \eta)a^{+-}(\xi, \eta)a^{-+}(\xi, \eta)a^{++}(\xi, \eta)$$

— факторизация в алгебре $W(\Gamma^2)$ модельного символа, тогда, ввиду известного произвола, фактор-множители можно выбрать так, чтобы $1 - \xi_1(\eta)\xi^{-1} = a^{--}(\xi, \eta)a^{-+}(\xi, \eta)$, $1 - \xi_2^{-1}(\eta)\xi = a^{+-}(\xi, \eta)a^{++}(\xi, \eta)$.

Рассмотрим уравнение

$$T_{(1-\xi_1(\eta)\xi^{-1})(1-\xi_2^{-1}(\eta)\xi)}\phi^{++}(\xi, \eta) = f^{++}(\xi, \eta).$$

Ввиду следствия к теореме 2 имеем

$$T_{\xi^{-1}}T_{a^{+-}}T_{a^{--}}T_{a^{-+}}T_{\xi}T_{a^{++}}\phi^{++}(\xi, \eta) = f^{++}(\xi, \eta).$$

Отсюда получаем

$$T_{a^{+-}}T_{1-\xi_1(\eta)\xi^{-1}}T_{\xi}T_{a^{++}}\phi^{++}(\xi, \eta) = c^+(\eta) + \xi f^{++}(\xi, \eta),$$

где $c^+(\eta) \in \ker T_{\xi^{-1}}$.

Преобразуя последнее уравнение и пользуясь условиями разрешимости уравнений вида $T_{\xi}\varphi^{++}(\xi, \eta) = f^{++}(\xi, \eta)$, получим следующее уравнение относительно функции $c^+(\eta)$:

$$\sum_{k \in Z_+} (P^{++}\xi_1(\eta)P^+)^k P^{++}b_k^-(\eta)P^+c^+(\eta) = f_1^+(\eta),$$

где

$$b^{+-}(\xi, \eta) = \sum_{j \in Z_+} b_j^-(\eta)\xi^j,$$

$$f_1^+(\eta) = - \sum_{k \in Z_+} (P^+\xi_1(\eta)^k P^+) T_{b^{+-}}\xi f^{++}(\xi, \eta)|_{\xi=0}.$$

Лемма 4. Оператор $D = \sum_{k \in Z_+} (P^{++}\xi_1(\eta)P^+)^k P^{++}b_k^-(\eta)P^+ : L_2^+(\Gamma) \rightarrow L_2^+(\Gamma)$ допускает представление $D = P^+b^{+-}(\xi_1(\eta), \eta)P^+ + K$, при этом оператор $P^+b^{+-}(\xi_1(\eta), \eta)P^+$ обратим, а оператор K вполне непрерывен.

Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $T_a : L_2^{++}(\Gamma^2) \rightarrow L_2^{++}(\Gamma^2)$ — оператор Теплица с символом $a(\xi, \eta) = \xi^{-1}a_{-1}(\eta) + a_0(\eta) + \xi a_1(\eta)$, $D = P^+b^{+-}(\xi_1(\eta), \eta)P^+ + K : L_2^+(\Gamma) \rightarrow L_2^+(\Gamma)$ — оператор Фредгольма, построенный по этому символу. Тогда

1) если уравнение $D\varphi^+(\eta) = 0$ имеет только тривиальное решение, то оператор T_a обратим, и единственное решение уравнения $T_a\phi^{++} = f^{++}$ при любой правой части определяется формулой

$$\begin{aligned} \phi^{++} &= (a^{++})^{-1}P^{++}\xi^{-1} \times \\ &\times \left(\sum_{k \in Z_+} (P^{++}\xi_1(\eta)\xi^{-1}P^{++})^k \sum_{j \in Z_+} P^{++}b_j^-(\eta)\xi^j P^{++}c^+(\eta) + f_1^{++} \right), \end{aligned}$$

где $c^+(\eta)$ — решение уравнения $Dc^+(\eta) = f_1^+(\eta)$, а $f_1^{++}(\xi, \eta) = \sum_{k \in Z_+} (P^+\xi_1(\eta)P^+)^k T_{b^{+-}}\xi f^{++}(\xi, \eta)$;

2) если однородное уравнение $D\varphi^+(\eta) = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений, а правая часть $f^{++}(\xi, \eta)$ такова, что

уравнение $D\varphi^+(\eta) = f_1^+(\eta)$ разрешимо, то уравнение $T_a\phi^{++} = f^{++}$ разрешимо и его общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} \phi^{++} &= (a^{++})^{-1}P^{++}\xi^{-1} \times \\ &\times \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (P^{++}\xi_1(\eta)\xi^{-1}P^{++})^k \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} P^{++}b_j^-(\eta)\xi^j P^{++}c^+(\eta) + f_1^{++} \right), \end{aligned}$$

где $c^+(\eta)$ — общее решение уравнения $D\varphi^+(\eta) = 0$. Общее решение однородного уравнения $T_a\phi^{++} = 0$ может быть получено из предыдущей формулы, где следует положить $f_1^{++} = 0$.

3. Оператор Теплица с символом $a(\xi, \eta) = \xi a^{-\bullet}(\xi, \eta)$

Лемма 5. Пусть функция $d^{+\bullet}(\xi, \eta) \in W^{+\bullet}(\Gamma^2)$ и удовлетворяет условиям $d^{+\bullet}(\xi, \eta) \neq 0$, $(\xi, \eta) \in \Gamma^2$, $\text{ind}_\xi d^{+\bullet}(\xi, \eta) = 1$. Тогда найдутся функции $\xi(\eta) \in W(\Gamma) : |\xi(\eta)| < 1$, $\eta \in \Gamma$, и $c^{+\bullet}(\xi, \eta) \in G^{+\bullet}W(\Gamma^2)$ такие, что $d^{+\bullet}(\xi, \eta) = (\xi - \xi(\eta))c^{+\bullet}(\xi, \eta)$.

Следствие 1. Если функция $a^{-\bullet}(\xi, \eta) \in W^{-\bullet}(\Gamma^2)$ и удовлетворяет условиям $a^{-\bullet}(\xi, \eta) \neq 0$, $(\xi, \eta) \in \Gamma^2$, $\text{ind}_\xi a^{-\bullet}(\xi, \eta) = -1$, то найдутся функции $\xi(\eta) \in W(\Gamma) : |\xi(\eta)| < 1$, $\eta \in \Gamma$, и $c^{-\bullet}(\xi, \eta) \in G^{-\bullet}W(\Gamma^2)$ такие, что $a^{-\bullet}(\xi, \eta) = (\xi^{-1} - \xi(\eta))c^{-\bullet}(\xi, \eta)$.

Следствие 2. Если функция $\xi a^{-\bullet}(\xi, \eta) : a^{-\bullet}(\xi, \eta) \in W^{-\bullet}(\Gamma^2)$ удовлетворяет условиям теоремы И. Б. Симоненко, то для оператора Теплица с символом $a(\xi, \eta) = \xi a^{-\bullet}(\xi, \eta)$ имеет место представление $T_a = T_{\xi^{-1}}T_{a--}T_{a+-}T_{a++}T_{a-+}T_\xi$, где $a^{\pm\pm}(\xi, \eta) \in G^{\pm\pm}W(\Gamma^2)$ — компоненты канонической факторизации в алгебре $W(\Gamma^2)$ функции $a(\xi, \eta)$. При этом последние можно выбрать, чтобы $a^{+-}(\xi, \eta)a^{++}(\xi, \eta) = 1 - \xi(\eta)\xi$.

Введем следующие обозначения, связанные с символом оператора T_a : $b^{\pm\pm}(\xi, \eta) = (a^{\pm\pm}(\xi, \eta))^{-1}$, $b^{+-}(\xi, \eta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} b_k^-(\eta)\xi^k$.

Лемма 6. Оператор Теплица $P^+b^{+-}(\xi(\eta), \eta)P^+ : L_2^+(\Gamma) \rightarrow L_2^+(\Gamma)$ обратим.

Лемма 7. Оператор $K = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} P^+b_k^-(\eta)(P^+\xi^k(\eta)P^+ - (P^+\xi(\eta)P^+)^k) : L_2^+(\Gamma) \rightarrow L_2^+(\Gamma)$ вполне непрерывен.

Рассмотрим уравнение $T_a\phi^{++} = f^{++}$, $\phi^{++}, f^{++} \in L_2^{++}(\Gamma^2)$. Применяя рассуждения, аналогичные рассуждениям предыдущего параграфа, получим для вспомогательной функции $c^+(\eta) \in L_2^+(\Gamma)$ урав-

нение $(Fc^+)(\eta) = f_2^+(\eta)$, где $F = P^+b^{+-}(\xi(\eta), \eta)P^+ + K$, а $f_2^+(\eta) = -(T_{b^-+}(T_{1-\xi(\eta)})^{-1}\xi T_{b^{--}}f)(\xi, \eta)|_{\xi=0}$.

Ввиду лемм 6, 7 оператор $F : L_2^+(\Gamma) \rightarrow L_2^+(\Gamma)$ фредгольмов, и мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. Пусть $T_a : L_2^{++}(\Gamma^2) \rightarrow L_2^{++}(\Gamma^2)$ — оператор Теплица с символом $a(\xi, \eta) = \xi a^{-\bullet}(\xi, \eta)$, $F = P^+b^{+-}(\xi(\eta), \eta)P^+ + K : L_2^+(\Gamma) \rightarrow L_2^+(\Gamma)$ — оператор Фредгольма, построенный по этому символу. Тогда

1) если уравнение $F\varphi^+(\eta) = 0$ имеет только тривиальное решение, то оператор T_a обратим и единственное решение уравнения $T_a\phi^{++} = f^{++}$ при любой правой части определяется формулой

$$\phi^{++} = P^{++}\xi^{-1}T_{b^{--}} \times \\ \times \left(\sum_{k \in Z_+} (P^{++}\xi_1(\eta)\xi^{-1}P^{++})^k \sum_{j \in Z_+} P^{++}b_j^-(\eta)\xi^j P^{++}c^+(\eta) + f_1^{++} \right),$$

где $c^+(\eta)$ — решение уравнения $Dc^+(\eta) = f_1^+(\eta)$, а $f_1^{++}(\xi, \eta) = \sum_{k \in Z_+} (P^+\xi(\eta)P^+)^k T_{b^{--}}\xi f^{++}(\xi, \eta)$;

2) если однородное уравнение $F\varphi^+(\eta) = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений, а правая часть $f^{++}(\xi, \eta)$ такова, что уравнение $F\varphi^+(\eta) = f_1^+(\eta)$ разрешимо, то уравнение $T_a\phi^{++} = f^{++}$ разрешимо и его общее решение имеет вид

$$\phi^{++} = P^{++}\xi^{-1}T_{b^{--}} \times \\ \times \left(\sum_{k \in Z_+} (P^{++}\xi_1(\eta)\xi^{-1}P^{++})^k \sum_{j \in Z_+} P^{++}b_j^-(\eta)\xi^j P^{++}c^+(\eta) + f_1^{++} \right),$$

где $c^+(\eta)$ — общее решение уравнения $F\varphi^+(\eta) = 0$. Общее решение однородного уравнения $T_a\phi^{++} = 0$ может быть получено из предыдущей формулы, где следует положить $f_1^{++} = 0$.

Литература

1. Беттхер А. Двумерные свертки в углах с ядрами, имеющими носитель в полуплоскости // Мат. заметки. — 1983. — Т. 34, № 2. — С. 207–218.
2. Беттхер А., Пасенчук А. Э. Об обратимости теплицевых операторов на квадрате, носители которых лежат в полуплоскости // Диф. и интегр. уравнения и их прил. — Элиста: Изд-во Калмыц. гос. ун-та, 1982. — С. 9–19.

3. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. — М.: Наука, 1971. — 352 с.
4. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. — Кишинев: Штиинца, 1973. — 428 с.
5. Douglas R. G. On the invertibility of a class of Toeplitz operators on the quarter-plane // Indiana Univ. Math. J. — 1972. — Vol. 21. — P. 1031–1035.
6. Малышев В. А. О решении уравнений Винера — Хопфа в четверти плоскости // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 187, № 6. — С. 1066–1069.
7. Osher S. J. On certain Toeplitz operators in two variables // Pacif. J. Math. — 1970. — Vol. 34, № 1. — P. 123–129.
8. Pasenchuk A. E. On certain Classes of invertible two-dimensional convolution operators // Sel. Math. Sov. — 1982. — Vol. 2, № 1. — P. 1–7.
9. Пилиди В. С. О бисингулярном уравнении в пространстве L_p // Мат. исслед. — Кишинев: Штиинца, 1971. — Т. 7, № 3. — С. 167–175.
10. Пилиди В. С., Сазонов Л. И. О бисингулярных операторах в пространстве гильбертовских функций // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 246, № 2. — С. 278–282.
11. Пилиди В. С., Сазонов Л. И. Локальный метод в теории операторов типа бисингулярных // Изв. высш. уч. зав. Сев.-Кав. регион. Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики (спецвыпуск). — 2015. — С. 100–106.
12. Рабинович В. С. Многомерное уравнение Винера — Хопфа для конусов // Теория функций, функц. анализ и их прил. — Харьков: Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1967. — С. 59–67.
13. Сазонов Л. И. Двумерные операторы Теплица с измеримыми символами // Мат. заметки. — 2003. — Т. 74, № 1. — С. 88–98.
14. Симоненко И. Б. О многомерных дискретных свертках // Мат. исслед. — Кишинев: Штиинца, 1968. — Вып. 1. — С. 298–313.

ПАСЕНЧУК АЛЕКСАНДР ЭДУАРДОВИЧ
 Южный федеральный университет
 РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
 E-mail: pasenchuk@mail.ru

ON NONSTANDARD PARTIAL MULTIPLICATIVITY IN THE THEORY OF TWO-DIMENSIONAL TOEPLITZ OPERATORS

Pasenchuk A. E.

A special class of Toeplitz operators in the space of measurable square-integrable functions on the torus is considered. For such operators a nonstandard partial multiplicativity property is established and some applications of this property are given.

Key words: Toeplitz operator, nonstandard multiplicativity.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ ЗНАЧЕНИЯМИ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДВУХТОЧЕЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА

В. В. Шустов

Рассмотрена задача интегрирования функции на основе ее приближения двухточечными интерполяционными многочленами Эрмита. Получены конечные формулы для квадратур, использующие значения функции и ее производных до m -го порядка включительно, заданных в концевых точках отрезка. Дана оценка погрешности численного интегрирования. Приведены примеры интегрирования функции и данные о погрешности и ее оценке. Проведено сравнение двухточечного приближения интеграла с методом, основанным на использовании формулы Эйлера — Маклорена.

Ключевые слова: квадратурные формулы с использованием производных, двухточечный многочлен Эрмита, оценка погрешности интегрирования, формула Эйлера — Маклорена.

Введение

В традиционных методах вычисления определенных интегралов, таких как метод трапеций, Симпсона, Гаусса [1–2] и др., используются только значения функции на отрезке интегрирования и не учитываются значения ее производных. При этом обычно осуществляется замена данной функции другой, более простой и далее вычисляется интеграл от этой аппроксимирующей функции. За приближенное значение интеграла от заданной функции принимается значение интеграла от приближающей функции.

Для построения квадратурных формул интересным и перспективным представляется наряду с значениями функции использовать и значения ее производных, заданных на отрезке интегрирования.

1. Постановка и решение задачи

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[x_0, x_1]$ и имеет набор производных достаточно высокого порядка на этом отрезке. Пусть также в обеих концевых точках отрезка $[x_0, x_1]$ заданы значения

функции $f(x)$ и ее производных до порядка m включительно:

$$f^{(j)}(x_i) = f_i^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad i = 0, 1. \quad (1)$$

Из условия существования производных следует, что для функции $f(x)$ существует определенный интеграл

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx. \quad (2)$$

Необходимо построить формулу для приближающего интеграла I_m , который использует условия (1) и аппроксимирует интеграл I с определенной точностью.

Для построения приближающего интеграла I_m предлагается использовать аппроксимацию подынтегральной функции интерполяционным многочленом Эрмита $H_m(x)$, учитывающего значения производных, в варианте его двухточечного представления [3].

Согласно результатам работы [3, с. 1097] приближающий многочлен $H_m(x)$, удовлетворяющий условиям (1), можно представить, в частности, в виде

$$\begin{aligned} H_m(x) = (1 - \xi)^{m+1} \sum_{j=0}^m \frac{f_0^{(j)}}{j!} (x - x_0)^j \sum_{k=0}^{m-j} a_m^k \xi^k + \\ + \xi^{m+1} \sum_{j=0}^m \frac{f_1^{(j)}}{j!} (x - x_1)^j \sum_{k=0}^{m-j} a_m^k (1 - \xi)^k. \end{aligned} \quad (3)$$

В формуле (3) для многочлена $H_m(x)$ буквой ξ обозначена относительная переменная, связанная с исходной переменной x соотношением

$$\xi = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \quad (4)$$

Коэффициент a_m^k определяется соотношением

$$a_m^k = \frac{(m+k)!}{k!m!} \quad (5)$$

и выражается через биномиальный коэффициент c_m^k :

$$a_m^k = c_{m+k}^k. \quad (6)$$

Обозначим через L длину отрезка $[x_0, x_1]$, определенную соотношением

$$L = x_1 - x_0. \quad (7)$$

Тогда формулу (3) для двухточечного многочлена $H_m(x)$ можно переписать с использованием только относительной переменной ξ :

$$\begin{aligned} H_m(\xi) = (1 - \xi)^{m+1} \sum_{j=0}^m \frac{f_0^{(j)} L^j}{j!} \xi^j \sum_{k=0}^{m-j} a_m^k \xi^k + \\ + \xi^{m+1} \sum_{j=0}^m \frac{f_1^{(j)} L^j}{j!} (\xi - 1)^j \sum_{k=0}^{m-j} a_m^k (1 - \xi)^k. \end{aligned}$$

Для двухточечного многочлена $H_m(x)$ можно построить определенный интеграл I_m по отрезку $[x_0, x_1]$ или, переходя только к относительной переменной ξ , по отрезку $[0, 1]$ в виде

$$I_m = \int_0^1 H_m(\xi) L d\xi. \quad (8)$$

Подставляя выражение для H_m , получим соотношение для определенного интеграла I_m :

$$I_m = \sum_{j=0}^m \left\{ \frac{f_0^{(j)} L^{j+1}}{j!} d_m^j + (-1)^j \frac{f_1^{(j)} L^{j+1}}{j!} e_m^j \right\}, \quad (9)$$

где коэффициенты d_m^j и e_m^j определяются формулами

$$d_m^j = \int_0^1 \xi^j (1 - \xi)^{m+1} \sum_{k=0}^{m-j} a_m^k \xi^k d\xi, \quad (10)$$

$$e_m^j = \int_0^1 (1 - \xi)^j \xi^{m+1} \sum_{k=0}^{m-j} a_m^k (1 - \xi)^k d\xi. \quad (11)$$

Путем замены переменной в формуле (11) для e_m^j легко показывается, что

$$d_m^j = e_m^j. \quad (12)$$

Формулу (10) для коэффициента d_m^j , пользуясь свойством интеграла и степеней, можно записать в виде

$$d_m^j = \sum_{k=0}^{m-j} a_m^k \int_0^1 \xi^{j+k} (1-\xi)^{m+1} d\xi. \quad (13)$$

Утверждение. *Имеет место равенство*

$$\int_0^1 \xi^{\alpha_0} (1-\xi)^{\alpha_1} d\xi = \frac{\alpha_0! \alpha_1!}{(1+\alpha_0+\alpha_1)!}. \quad (14)$$

◁ Доказательство проводится методом математической индукции по каждому параметру, например, по α_1 .

1. *База индукции.* Вычислим левую и правую части формулы (14) при α_1 :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \xi^{\alpha_0} (1-\xi)^0 d\xi &= \left. \frac{\xi^{\alpha_0+1}}{1+\alpha_0} \right|_0^1 = \frac{1}{1+\alpha_0}, \\ \frac{\alpha_0! 0!}{(1+\alpha_0+0)!} &= \frac{\alpha_0!}{(1+\alpha_0)!} = \frac{1}{1+\alpha_0}. \end{aligned}$$

Сравнивая правые части формул, убеждаемся, что утверждение верно при $\alpha_1 = 0$.

2. *Шаг индукции.* Вычисляем интеграл при $\alpha_1 + 1$, используя интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \frac{\xi^{\alpha_0+1}}{\alpha_0+1} (1-\xi)^{\alpha_1+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\xi^{\alpha_0+1}}{\alpha_0+1} (\alpha_1+1)(-1)(1-\xi)^{\alpha_1} d\xi = \\ = \frac{\alpha_1+1}{\alpha_0+1} \int_0^1 \xi^{\alpha_0+1} (1-\xi)^{\alpha_1} d\xi. \end{aligned}$$

Правая часть цепочки равенств с использованием индукционного предположения принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1+1}{\alpha_0+1} \int_0^1 \xi^{\alpha_0+1} (1-\xi)^{\alpha_1} d\xi = \\ = \frac{\alpha_1+1}{\alpha_0+1} \frac{(\alpha_0+1)! \alpha_1!}{(1+(\alpha_0+1)+\alpha_1)!} = \frac{\alpha_0! (\alpha_1+1)!}{(1+\alpha_0+(\alpha_1+1))!}. \end{aligned}$$

Из обеих цепочек равенств следует, что

$$\int_0^1 \xi^{\alpha_0} (1 - \xi)^{\alpha_1+1} d\xi = \frac{\alpha_0! (\alpha_1 + 1)!}{(1 + \alpha_0 + (\alpha_1 + 1))!},$$

т. е. доказываемая формула (14) верна и при $\alpha_1 + 1$. Согласно принципу математической индукции эта формула верна для всех α_1 . Аналогично доказывается, что эта формула верна при всех α_0 . ▮

Путем несложных преобразований формула (10) для коэффициента d_m^j записывается в виде

$$d_m^j = \sum_{k=0}^{m-j} \frac{c_{m+k}^k}{(2 + m + j + k) c_{m+1+j+k}^{j+k}}. \quad (15)$$

Проведя суммирование в правой части формулы (15), получим компактное выражение для коэффициента d_m^j :

$$d_m^j = \frac{c_{m+1}^{j+1}}{(j+1) c_{2m+2}^{j+1}}. \quad (16)$$

Введем коэффициент D_m^j , связанный с коэффициентом d_m^j соотношением

$$D_m^j = \frac{d_m^j}{j!}, \quad (17)$$

и для его значения получим формулу

$$D_m^j = \frac{c_{m+1}^{j+1}}{(j+1)! c_{2m+2}^{j+1}}. \quad (18)$$

Окончательная формула для представления интеграла I_m в соответствии с (9) записывается в виде

$$I_m = \sum_{j=0}^m D_m^j L^{j+1} \left[f_0^{(j)} + (-1)^j f_1^{(j)} \right]. \quad (19)$$

Остаточный член приближения rI_m интеграла I_m можно записать в виде

$$rI_m = \int_{x_0}^{x_1} r_m(x) dx, \quad (20)$$

где остаточный член r_m двухточечного интерполяционного многочлена Эрмита согласно [4, с. 173] записывается так:

$$r_m(x) = \frac{f^{(2m+2)}(\eta)}{(2m+2)!} (x-x_0)^{m+1} (x-x_1)^{m+1}, \quad \eta \in (x_0, x_1). \quad (21)$$

С учетом этого соотношения остаточный член приближения rI_m примет форму

$$rI_m = \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{(2m+2)}(\eta)}{(2m+2)!} (x-x_0)^{m+1} (x-x_1)^{m+1} dx. \quad (22)$$

После перехода к относительной переменной ξ и небольших преобразований остаточный член приближения может быть записан в виде

$$rI_m = \frac{(-1)^{m+1} L^{2m+3}}{(2m+2)!} \int_0^1 f^{(2m+2)}(\eta) \xi^{m+1} (1-\xi)^{m+1} dx. \quad (23)$$

Используя теорему о среднем [5, с. 402] и учитывая, что выражение $\xi^{m+1}(1-\xi)^{m+1}$ не меняет знак на отрезке $[0,1]$, эту формулу перепишем в виде

$$rI_m = \frac{(-1)^{m+1} L^{2m+3}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\eta_1) \int_0^1 \xi^{m+1} (1-\xi)^{m+1} dx, \quad \eta_1 \in (x_0, x_1).$$

С учетом полученной ранее формулы (14) для интеграла в правой части этой формулы получим

$$rI_m = \frac{(-1)^{m+1} L^{2m+3}}{(2m+2)!} \frac{(m+1)!(m+1)!}{(2m+3)!} f^{(2m+2)}(\eta_1). \quad (24)$$

Согласно полученным результатам можно сказать, что имеет место следующая

Теорема. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (1). Тогда для определенного интеграла этой функции имеет место формула

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \sum_{j=0}^m D_m^j L^{j+1} \left[f_0^{(j)} + (-1)^j f_1^{(j)} \right] + rI_m, \quad (25)$$

где

$$D_m^j = \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{m-j} \frac{c_{m+k}^k}{(2+m+j+k)c_{m+1+j+k}^{j+k}} = \frac{c_{m+1}^{j+1}}{(j+1)!c_{2m+2}^{j+1}}, \quad (26)$$

$$rI_m = \frac{(-1)^{m+1}b_m L^{2m+3}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\eta), \quad (27)$$

$$b_m = \frac{(m+1)!(m+1)!}{(2m+3)!}, \quad (28)$$

где $L = x_1 - 0$, $\eta \in (x_0, x_1)$.

Следствие. Пусть производная функции порядка $2m+2$ включительно на отрезке $[x_0, x_1]$ ограничена некоторой константой $M_{2m+2} > 0$, т. е. считаем, что

$$|f^{(2m+2)}(x)| \leq M_{2m+2}, \quad x \in (x_0, x_1). \quad (29)$$

Тогда для погрешности приближения интеграла $\delta I_m = |rI_m|$ имеет место неравенство

$$\delta I_m \leq \Delta I_m,$$

где через ΔI_m обозначена оценка погрешности приближения:

$$\Delta I_m = \frac{b_m M_{2m+2} L^{2m+3}}{(2m+2)!}. \quad (30)$$

В таблице 1 приведены формулы представления интеграла I_m и оценки его погрешности ΔI_m для начальных значений m .

Таблица 1

m	Формулы для интеграла I_m	ΔI_m
0	$I_0 = \frac{L}{2}(f_0 + f_1)$	$\frac{M_2 L^3}{12}$
1	$I_1 = \frac{L}{2}(f_0 + f_1) + \frac{L^2}{12}(f'_0 - f'_1)$	$\frac{M_4 L^5}{720}$
2	$I_2 = \frac{L}{2}(f_0 + f_1) + \frac{L^2}{10}(f'_0 - f'_1) + \frac{L^3}{120}(f''_0 + f''_1)$	$\frac{M_6 L^7}{100800}$
3	$I_3 = \frac{L}{2}(f_0 + f_1) + \frac{3L^2}{28}(f'_0 - f'_1) + \frac{L^3}{84}(f''_0 + f''_1) + \frac{L^4}{1680}(f'''_0 - f'''_1)$	$\frac{M_8 L^9}{25401600}$
4	$I_4 = \frac{L}{2}(f_0 + f_1) + \frac{L^2}{9}(f'_0 - f'_1) + \frac{L^3}{72}(f''_0 + f''_1) + \frac{L^4}{1008}(f'''_0 - f'''_1) + \frac{L^5}{30240}(f^{(4)}_0 + f^{(4)}_1)$	$\frac{M_{10} L^{11}}{10059033600}$

Отметим, что формулы для интеграла I_m и его оценки ΔI_m при $m = 0$ соответствуют формулам метода трапеций.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для важного случая, когда максимальные порядки используемых производных m_0 и m_1 на концах отрезка $[x_0, x_1]$ не равны друг другу, и который требует отдельного рассмотрения и исследования, приведем без вывода лишь конечную квадратурную формулу:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \sum_{j=0}^{m_0} D_{m_0, m_1}^j L^{j+1} f_0^{(j)} + \sum_{j=0}^{m_1} (-1)^j D_{m_1, m_0}^j L^{j+1} f_1^{(j)} + rI, \quad (31)$$

где

$$D_{m_0, m_1}^j = \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{m_0-j} \frac{c_{m_1+k}^k}{(2+m_1+j+k)c_{m_1+1+j+k}^{j+k}} = \frac{c_{m_0+1}^{j+1}}{(j+1)!c_{m_0+m_1+2}^{j+1}} \quad (32)$$

и rI — остаточный член.

2. Численный пример интегрирования и сравнение с формулой Эйлера — Маклорена

Для вычисления определенных интегралов существуют и другие формулы интегрирования, использующие значения производных подынтегральной функции. Примером такой формулы является формула интегрирования Эйлера — Маклорена.

Интеграл I от функции $f(x)$ для этого подхода представим в виде $I = E_m + rE_m$, в котором приближенное значение интеграла E_m выражается формулой Эйлера — Маклорена [4, с. 290], приведенной для случая задания значений функции только на концах отрезка $[x_0, x_1]$:

$$E_m = \frac{L}{2}[f_0 + f_1] + \sum_{j=1}^m \frac{B_{2j} L^{2j}}{(2j)!} [f_0^{(2j-1)} - f_1^{(2j-1)}], \quad (33)$$

где B_{2j} — числа Бернулли, рассмотренные, например, в [4, с. 292], rE_m — остаточный член, который согласно [4, с. 292] имеет вид

$$rE_m = -\frac{B_{2m+2} L^{2m+3}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\lambda), \quad \lambda \in (x_0, x_1). \quad (34)$$

В отличие от формулы двухточечного интегрирования, в которую входят производные как четного, так и нечетного порядков, формула Эйлера — Маклорена содержит производные лишь нечетного порядка.

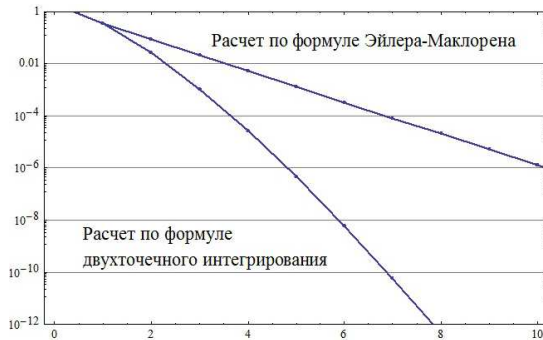
Для сравнения обоих методов интегрирования проведены расчеты приближения интеграла $I = \int_0^\pi \sin x \, dx$ по формуле двухточечного интегрирования и по формуле Эйлера — Маклорена для различных значений m . Точное значение этого интеграла, определенное аналитическим путем, равно двум.

С использованием обоих подходов получены численные значения интегралов I_m , E_m , их погрешностей δI_m , δE_m и их оценок ΔI_m , ΔE_m для начальных значений m , которые представлены в таблице 2. В каждой ячейке таблицы второго, третьего и четвертого столбца вверху приводятся результаты расчета по формуле двухточечного интегрирования, внизу — результаты по формуле Эйлера — Маклорена.

Таблица 2

m	I_m E_m	δI_m δE_m	ΔI_m ΔE_m
0	0.000000000 0.000000000	2.000000000 2.000000000	2.583856390 2.583856390
1	1.644934067 1.644934067	0.355065933 0.355065933	0.425027340 0.425027340
2	1.973920880 1.915514875	0.026079120 0.084485125	0.029963226 0.099877422
3	1.998952025 1.979098817	0.001047975 0.020901183	0.001173513 0.024643766
4	1.999973416 1.994787525	0.000026584 0.005212475	0.000029248 0.006142026

На рис. 1 представлены зависимости погрешности приближения δ_m от параметра m , полученные при использовании двухточечной формулы интегрирования и по формуле Эйлера — Маклорена.

Рис. 1. Зависимость погрешности интегрирования δ_m от m .

Анализ результатов сравнения показал, что оба подхода при $m = 0$ и $m = 1$ дают одинаковые результаты. Однако при m равным двум и более точность результатов, полученных при использовании двухточечной формулы интегрирования, существенно выше точности данных, полученных по формуле Эйлера — Маклорена, и это повышение точности увеличивается с увеличением m , достигая, как это видно на рис. 1, при $m = 7$ более 6 порядков.

Литература

1. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. — М.: Наука, 1967. — 500 с.
2. Никольский С. М. Квадратурные формулы. — М.: Наука, 1988. — 256 с.
3. Шустов В. В. О приближении функций двухточечными интерполяционными многочленами Эрмита // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2015. — Т. 55, № 7. — С. 1091–1108.
4. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. — М.: Физматлит, 1962. — 464 с.
5. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Т. 1. — М.: Высш. шк., 1970. — 592 с.

Шустов Виктор Владимирович
Государственный научно-исследовательский
институт авиационных систем
РОССИЯ, 125319, Москва, ул. Викторенко, 7
E-mail: vshustov@gosniias.ru

REPRESENTATION OF INTEGRALS USING VALUES OF FUNCTION AND ITS DERIVATIVES ON THE BASIS TWO-POINT HERMITE POLINOMOALS

Shustov V. V.

Integration of a function on the basis of its two-point approximation by Hermite interpolation polynomials is considered. Final formula for the quadrature is derived using the values of the function and its derivatives up to m -th order given at the endpoints of the segment. The error estimation of numerical integration is given. Examples of function integration with error estimation are given. The two-point approximation of integration and the method based on the Euler–Maclaurin formula are compared.

Key words: quadrature formula using derivatives, two-point Hermite polynomial, integrations error estimation, Euler–Maclaurin formula.

II. Дифференциальные
и интегральные уравнения.

Математическое
моделирование

БИФУРКАЦИИ В СИСТЕМЕ РЭЛЕЯ С ДИФФУЗИЕЙ

А. В. Казарников, С. В. Ревина

Рассматривается система реакции-диффузии с кубической нелинейностью, которая является бесконечномерным аналогом классической системы Рэля. На границе области заданы однородные краевые условия Неймана. Найдены критические значения параметра, при которых происходит бифуркация рождения цикла или возникновение новых стационарных режимов, построена асимптотика этих вторичных решений. В одномерном случае показана инвариантность системы на некоторых бесконечномерных подпространствах фазового пространства системы, указаны дополнительные симметрии, изучены бифуркации и исследована устойчивость решений на инвариантных подпространствах.

Ключевые слова: метод Ляпунова — Шмидта, системы реакции-диффузии, формирование структур.

1. Постановка задачи

Рассматривается система Рэля с диффузией:

$$\begin{aligned} v_t &= \nu \Delta v + w, \\ w_t &= \nu \Delta w - v + \mu w - w^3, \end{aligned} \quad (1)$$

где $v = v(x, t)$, $w = w(x, t)$, $x \in \Omega$, $t > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область, $\mu \in \mathbb{R}$ — управляющий параметр, $\nu > 0$ — коэффициент диффузии. При $\nu = 0$ приходим к классической системе Рэля

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -y_1 + \mu y_2 - y_2^3. \end{aligned} \quad (2)$$

Известно, что нулевое решение системы (2) при $\mu < 0$ асимптотически устойчиво, при $\mu = 0$ оно теряет устойчивость и при $\mu > 0$ в системе существует устойчивый предельный цикл.

Будем интересоваться стационарными и периодическими по времени решениями системы Рэля с диффузией (1), ответвляющимися от основного (нулевого) решения при изменении параметра μ , если на границе области Ω заданы краевые условия Неймана:

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (3)$$

Целью настоящей работы является исследование бифуркационного поведения системы Рэлея с диффузией при изменении параметра μ , нахождение инвариантных подпространств системы и исследование бифуркаций на этих подпространствах, построение асимптотики вторичных решений, отвечающих от нулевого, численное исследование их разрушения.

Краевые условия Дирихле и смешанные краевые условия рассматривались в [1–4]. Для получения вторичных решений применен метод Ляпунова — Шмидта в форме, развитой В. И. Юдовичем [5–6]. Метод применим к дифференциальным уравнениям, заданным как в конечномерных, так и бесконечномерных пространствах, в том числе к уравнениям Навье — Стокса [7–9].

2. Операторный вид системы

Сведем систему Рэлея с диффузией (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве H вектор-функций $\mathbf{u} = (v, w)$, компоненты которых принадлежат $L_2(\Omega)$.

Пусть $A(\mu) : H \rightarrow H$ — линейный оператор, действующий на вектор-функцию $\mathbf{u} = (v, w)$, $v, w \in W_2^2(\Omega)$, по правилу

$$A(\mu)\mathbf{u} = \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mu\mathbf{C}\mathbf{u}. \quad (4)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. В области определения оператора $A(\mu)$, как обычно, учитываются краевые условия (3).

Пусть нелинейный оператор $K(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) : H^3 \rightarrow H$ действует по правилу $K(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (0, a_2 b_2 c_2)$. Тогда систему (1) можно записать в операторном виде:

$$\dot{\mathbf{u}} = A(\mu)\mathbf{u} - K(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in H. \quad (5)$$

3. Инвариантные подпространства

Известно, что в пространстве H существует ортогональный базис $\{\mathbf{e}_1\psi_k, \mathbf{e}_2\psi_k\}_{k=0}^{+\infty}$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, ψ_k являются собственными функциями скалярного оператора $-\Delta$, заданного в области Ω с соответствующими краевыми условиями

$$-\Delta\psi_k = \lambda_k\psi_k, \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (6)$$

а собственные значения образуют неубывающую последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^{+\infty}$, причем минимальное собственное значение λ_0 равно нулю.

Пусть $x \in [0, 1]$. Тогда собственные функции оператора Лапласа $\psi_n = \cos(\pi nx)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Через H_{2n-1} обозначим подпространство H , соответствующее подмножеству базисных векторов с нечетными индексами $\{e_1\psi_{2n-1}, e_2\psi_{2n-1}\}_{n=1}^{+\infty}$.

Нетрудно убедиться, что наряду с линейным оператором $A(\mu)$ нелинейный оператор $K(a, b, c)$ отображает подпространство H_{2n-1} в себя. Это связано с кубической нелинейностью рассматриваемой системы. Следовательно, систему Рэлея с диффузией (5) можно рассматривать на данном подпространстве. С помощью замены $x \rightarrow kx$ убеждаемся, что подпространство $H_{k(2n-1)}$ для любого натурального k также является инвариантным подпространством системы. Минимальным собственным значением оператора $-\Delta$ на подпространстве $H_{k(2n-1)}$ является λ_k — k -ое собственное значение этого оператора на всем пространстве H .

4. Линейный анализ устойчивости

Для нахождения критических значений параметра μ рассмотрим линейную спектральную задачу:

$$A(\mu)\varphi = \sigma\varphi, \quad \varphi \neq 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Критическим значением* параметра μ будем называть такое значение μ_{cr} , при котором собственные значения σ линейного оператора $A(\mu)$ выходят на мнимую ось.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если спектр $A(\mu_{cr})$ лежит в замкнутой левой полуплоскости комплексной плоскости, причем на мнимой оси лежит лишь нулевое собственное значение, то говорят, что имеет место *монотонная потеря устойчивости*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если спектр $A(\mu_{cr})$ лежит в замкнутой левой полуплоскости комплексной плоскости, причем на мнимой оси лежит лишь пара комплексно-сопряженных собственных значений $\pm i\omega_0$ ($\omega_0 \neq 0$), то говорят, что происходит *колебательная потеря устойчивости*.

В случае монотонной потери устойчивости при переходе параметра через критическое значение, как правило, от основного решения ответвляются новые стационарные режимы.

В случае колебательной потери устойчивости линеаризованная система имеет периодическое по t решение, и следует ожидать, что при μ , близких к μ_{cr} , существует периодическое по времени решение нелинейного уравнения.

Будем разыскивать собственные функции оператора $A(\mu)$ в виде рядов по базису пространства H . Собственные значения σ_k оператора $A(\mu)$ находятся из уравнений

$$\sigma^2 - \text{Tr}(A_k(\mu))\sigma + \text{Det}(A_k(\mu)) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $A_k(\mu) = B + \mu C - \nu\lambda_k I$, $\text{Tr}(A_k(\mu)) = 2\nu\lambda_k - \mu$ и, соответственно, $\text{Det}(A_k(\mu)) = (\nu\lambda_k)^2 - \mu(\nu\lambda_k) + 1$.

Пусть индекс k фиксирован. Собственные значения σ_k оператора $A(\mu)$ расположены строго в левой полуплоскости, если все коэффициенты квадратного трехчлена положительны:

$$\text{Re}(\sigma_{1,2}^k(\mu)) < 0 \iff \begin{cases} \text{Tr}(A_k(\mu)) < 0, \\ \text{Det}(A_k(\mu)) > 0. \end{cases}$$

Колебательная потеря устойчивости имеет место, если обращается в ноль след, а определитель остается положительным. При монотонной потере устойчивости определитель обращается в ноль, а след остается отрицательным.

С учетом выражений для определителя и следа находим, что

$$\text{Re}(\sigma_{1,2}^k(\mu)) < 0 \iff \begin{cases} \mu < 2\nu\lambda_k, \\ \mu(\nu\lambda_k) < (\nu\lambda_k)^2 + 1. \end{cases}$$

Таким образом, при $\nu\lambda_k < 1$ обращению в ноль следа соответствует меньшее значение параметра μ , чем обращению в ноль определителя, и происходит колебательная потеря устойчивости. Если же выполняется противоположное неравенство $\nu\lambda_k \geq 1$, то имеет место монотонная потеря устойчивости.

Подставив выражения определителя и следа, находим собственные значения оператора $A(\mu)$:

$$\sigma_{1,2}^k(\mu) = \frac{-(2\nu\lambda_k - \mu) \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Сначала будем рассматривать систему Рэлея с диффузией на всем пространстве H . Так как при этом $\lambda_0 = 0$, то первое критическое значение параметра $\mu_{cr}^{(0)}$ равно нулю при любых значениях коэффициента диффузии ν . При $\mu_{cr}^{(0)} = 0$ в системе происходит

колебательная потеря устойчивости. Соответствующая собственная функция φ в этом случае не зависит от x :

$$\varphi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \psi_0, \quad \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\text{mes}(\Omega)}}.$$

Теперь рассмотрим систему в одномерном случае $x \in [0, 1]$ на подпространстве $H_{k(2n-1)}$ при фиксированном $k \in N$. Если $\nu\lambda_k < 1$, то имеет место колебательная потеря устойчивости, критическое значение параметра находится по формуле $\mu_{cr}^{(k)} = 2\nu\lambda_k$, а соответствующая собственная функция — по формуле

$$\varphi = \frac{i}{2\omega_{0k}} \begin{pmatrix} 1 \\ \nu\lambda_k + i\omega_{0k} \end{pmatrix} \psi_k(x), \quad \omega_{0k} = \sqrt{1 - \nu^2\lambda_k^2}.$$

Если $\nu\lambda_k \geq 1$, то происходит монотонная потеря устойчивости, критическое значение параметра μ и собственная функция φ находятся соответственно по формулам

$$\mu_{cr}^{(k)} = \frac{1}{\nu\lambda_k} + \nu\lambda_k, \quad \varphi = \frac{1}{1 + \nu\lambda_k} \begin{pmatrix} 1 \\ \nu\lambda_k \end{pmatrix} \psi_k(x).$$

5. Автоколебания и стационарные решения

Рассмотрев линейную спектральную задачу, переходим к нахождению вторичных периодических по времени или стационарных решений, отвечающих от нулевого положения равновесия системы при критическом значении параметра μ . Применим метод Ляпунова — Шмидта. Схема дальнейших рассуждений однотипна, если рассматривать систему как во всем пространстве H , в случае произвольной области Ω , так и в одномерном случае на инвариантных подпространствах $H_{k(2n-1)}$.

Пусть $\nu\lambda_k < 1$ (в случае всего пространства H это условие выполняется для любого ν). Введем в (5) замену времени $\tau = \omega t$, а через $\varepsilon^2 = \mu - \mu_{cr}^{(k)}$ обозначим надкритичность. Тогда (5) примет вид:

$$\omega \dot{\mathbf{u}} - A(\mu_{cr})\mathbf{u} = \varepsilon^2 C\mathbf{u} - K(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad (7)$$

точкой обозначено дифференцирование по τ . Неизвестное 2π -периодическое по τ решение \mathbf{u} и неизвестную частоту ω будем разыскивать в виде рядов по параметру ε :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \mathbf{u}_i, \quad \omega = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \omega_i, \quad \omega_0 = \omega_{0k}. \quad (8)$$

Первые три компоненты разложения циклической частоты равны нулю: $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$, а $\omega_4 \neq 0$. Первые компоненты асимптотики вторичного $\frac{2\pi}{\omega}$ -периодического решения имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \varepsilon \alpha_1 (e^{i\omega t} \boldsymbol{\varphi} + e^{-i\omega t} \boldsymbol{\varphi}^*) + \\ + \varepsilon^3 (\alpha_3 (e^{i\omega t} \boldsymbol{\varphi} + e^{-i\omega t} \boldsymbol{\varphi}^*) + \mathbf{u}_3^p(\omega t)) + O(\varepsilon^4), \\ \omega = \sqrt{1 - \nu^2 \lambda_k^2} + \varepsilon^4 \omega_4 + O(\varepsilon^5). \end{cases} \quad (9)$$

Выражения для α_1 , \mathbf{u}_3^p , α_3 , ω_4 находятся явно.

По индукции доказывается, что четные члены асимптотики и нечетные компоненты циклической частоты равны нулю, т. е. $\mathbf{u}_{2k} = 0$, $\alpha_{2k} = 0$, $\omega_{2k-1} = 0$ для всякого $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим уравнение при ε^n в случае нечетного $n \geq 5$. Тогда правая часть этого уравнения представляет собой нечетный тригонометрический полином по времени степени n :

$$\omega_0 \dot{\mathbf{u}}_n - A(\mu_{cr}) \mathbf{u}_n = \mathbf{f}_{1n}(x) e^{i\tau} + \mathbf{f}_{3n}(x) e^{3i\tau} + \dots + \mathbf{f}_{nn}(x) e^{in\tau} + \text{к.с.},$$

а его 2π -периодическое решение также является нечетным тригонометрическим полиномом степени n :

$$\mathbf{u}_n = \alpha_n \boldsymbol{\varphi} e^{i\tau} + \mathbf{w}_{1n}(x) e^{i\tau} + \dots + \mathbf{w}_{nn}(x) e^{in\tau} + \text{к.с.},$$

где $\mathbf{w}_{kn}(x) = -(A(\mu_{cr}) - ik\omega_0 I)^{-1} \mathbf{f}_{kn}(x)$, а через к.с. обозначено выражение, комплексно сопряженное к данному.

Постоянная α_{n-2} и компонента циклической частоты ω_{n-1} определяются из условия разрешимости данного уравнения по формулам

$$\alpha_{n-2} = \text{Re}(h_n), \quad \omega_{n-1} = \frac{1}{\alpha_1} \text{Im}(h_n),$$

где

$$h_n = \int_0^{2\pi} (g_n, \boldsymbol{\Phi}) e^{-i\tau} d\tau,$$

$$g_n = C(\mathbf{u}_{n-2}^p) - 3K(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{n-2}^p) - \sum_{i_1+i_2+i_3=n} 3K(\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \mathbf{u}_{i_3}),$$

$$(i_1, i_2, i_3) \neq (1, 1, n-2),$$

через $\boldsymbol{\Phi}$ обозначена собственная функция линейной сопряженной задачи, а через \mathbf{u}_{n-2}^p — частное решение неоднородного уравнения при $(n-2)$ -ой степени.

При $\mu_{cr} = \mu_{cr}^{(0)}$ постоянная α_{n-2} и компонента циклической частоты ω_{n-1} поочередно равны нулю, а коэффициенты тригонометрических полиномов \mathbf{f}_{kn} принимают поочередно то чисто вещественные, то чисто мнимые значения:

- при $n = 2m - 1$, $m \in \mathcal{A}_0$

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{kn} &= (0, R_{nk}), R_{nk} \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{f}_{1n} &= (iR_{n1}, R_{n1}), R_{n1} \in \mathbb{R}, \alpha_{n-2} = 0;\end{aligned}$$

- при $n = 2m + 1$, $m \in \mathcal{A}_0$

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{kn} &= (0, R_{nk}), R_{nk} \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{f}_{1n} &= (iR_{n1}, R_{n1}), R_{n1} \in \mathbb{R}, \alpha_{n-2} = 0;\end{aligned}$$

где $\mathcal{A}_0 = \{m = 2k + 1, k \geq 2, k \in \mathbb{N}\}$.

Теперь рассмотрим случай монотонной потери устойчивости и найдем вторичные стационарные решения на подпространствах $H_{k(2n-1)}$ при фиксированном натуральном k .

Пусть $\nu\lambda_k \geq 1$. Положив в (7) $\omega = 0$, приходим к уравнению для нахождения стационарных решений. Будем разыскивать его решения в виде ряда (8). При малых $\varepsilon > 0$ существует нетривиальное стационарное решение, первые члены его асимптотики имеют вид

$$\mathbf{u} = \varepsilon\alpha_1\boldsymbol{\varphi} + \varepsilon^3(\alpha_3\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{u}_3^p) + O(\varepsilon^4). \quad (10)$$

Здесь α_1 , \mathbf{u}_3^p , α_3 находятся явно.

Так же как в нестационарном случае, показывается, что четные компоненты асимптотического разложения вторичного стационарного решения равны нулю, т. е. $\mathbf{u}_{2k} = 0$, $\alpha_{2k} = 0$ для всякого $k \in \mathbb{N}$.

Амплитуда α_{n-2} определяется по формуле

$$\alpha_{n-2} = -\frac{3}{2} \frac{(\mathbf{g}_n, \boldsymbol{\Phi})}{(C\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\Phi})}, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{g}_n = K(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{n-2}^p) + \sum_{i_1+i_2+i_3=n} K(\mathbf{u}_{i_1}, \mathbf{u}_{i_2}, \mathbf{u}_{i_3}), \quad (12)$$

причем $(i_1, i_2, i_3) \neq (1, 1, n-2)$, а через \mathbf{u}_{n-2}^p обозначено частное решение неоднородного уравнения при $(n-2)$ -ой степени.

При $\mu \leq \mu_{cr}^{(0)}$ нулевое решение системы устойчиво в пространстве H , а при $\mu > \mu_{cr}^{(0)}$ рождается устойчивый предельный цикл. Это периодическое по времени решение не зависит от пространственной переменной x и является решением системы Рэлея с диффузией в любой ограниченной области Ω . Периодические или стационарные решения, которые существуют при малых $\mu > \mu_{cr}^{(k)}$ и найдены выше, неустойчивы во всем пространстве H . Однако в одномерном случае эти решения будут устойчивыми на инвариантных подпространствах пространства H .

6. Бифуркационное поведение системы

Пусть $x \in [0, 1]$. При $\mu \leq \mu_{cr}^{(1)}$ нулевое положение равновесия системы устойчиво в H_{2n-1} . Применяя метод Ляпунова — Шмидта, убеждаемся, что при малых $\mu > \mu_{cr}^{(1)}$ существует устойчивое в H_{2n-1} вторичное решение. Если $\nu\lambda_1 < 1$, то $\mu_{cr}^{(1)} = 2\nu\lambda_1$, и происходит бифуркация рождения цикла; если $\nu\lambda_1 \geq 1$, то $\mu_{cr}^{(1)} = \frac{1}{\nu\lambda_1} + \nu\lambda_1$, и рождается нетривиальное стационарное решение.

При $\mu \leq \mu_{cr}^{(2)}$ нулевое положение равновесия устойчиво в $H_{2(2n-1)}$. При малых $\mu > \mu_{cr}^{(2)}$ существует устойчивое в $H_{2(2n-1)}$ вторичное решение, которое является нетривиальным стационарным решением или циклом в зависимости от того, превосходит $\nu\lambda_2$ единицу или нет.

Продолжая этот процесс, получаем счетное множество инвариантных подпространств $H_k = H_{k(2n-1)}$ для $k = 1, 2, 3, \dots$, на каждом из которых ответвляющиеся вторичные решения устойчивы при малых $\mu > \mu_{cr}^k$. Асимптотика вторичных решений построена методом Ляпунова — Шмидта. Среди этих вторичных решений может быть лишь конечное число циклов. Начиная с некоторого k_* , которое задается условием $\nu\lambda_{k_*} \geq 1$, от нулевого равновесия ответвляются нетривиальные стационарные режимы.

7. Обобщения

Выводы работы остаются справедливыми, если рассмотреть уравнение Рэлея (1) с различными коэффициентами диффузии: ν_1 в первом уравнении и ν_2 — во втором, при условии, что $0 < \nu_1 < \nu_2$. Критические значения параметра при этом имеют вид $\mu_{cr} = (\nu_1 + \nu_2)\lambda_k$ для колебательной потери устойчивости и $\mu_{cr} = \frac{1}{\nu_1\lambda_k} + \nu_2\lambda_k$ — для монотонной.

Инвариантные подпространства можно определить в многомерном случае \mathbb{R}^m при $m > 1$, если область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ является прямоугольным параллелепипедом.

Литература

1. Казарников А. В., Ревина С. В. Возникновение автоколебаний в системе Рэля с диффузией // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. — 2016. — Т. 9, № 2. — С. 16–28.
2. Казарников А. В., Ревина С. В. Асимптотика стационарных решений системы Рэля с диффузией // Изв. высш. уч. зав. Сев.-Кавк. регион. Сер. Естеств. науки. — 2016. — № 3 (191). — С. 13–19.
3. Казарников А. В., Ревина С. В. Асимптотика периодических по времени решений в системе Рэля с диффузией // Мат. форум. Т. 10, ч. 2. Исслед. по мат. анализу, диф. уравнениям и их прил. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2016. — С. 125–133. — (Итоги науки. Юг России.)
4. Kazarnikov A. V., Revina S. V., Haario H. Numerical and asymptotical analysis of Rayleigh reaction-diffusion system // Fourth China–Russia Conf. on Numerical Algebra with Appl. — Rostov-on-Don: South. Federal Univ., 2015. — P. 114–119.
5. Юдович В. И. Возникновение автоколебаний в жидкости // Прикл. мат. и мех. — 1971. — Т. 35, № 4. — С. 638–655.
6. Юдович В. И. Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима // Прикл. мат. и мех. — 1972. — Т. 36, № 3. — С. 450–459.
7. Ревина С. В., Юдович В. И. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических трехмерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ. — 2001. — № 2. — С. 29–41.
8. Мелехов А. П., Ревина С. В. Возникновение автоколебаний при потере устойчивости пространственно-периодических двумерных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых возмущений // Изв. РАН. МЖГ. — 2008. — № 2. — С. 41–56.
9. Ревина С. В. Рекуррентные формулы длинноволновой асимптотики задачи устойчивости сдвиговых течений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2013. — Т. 53, № 8. — С. 1387–1401.

Казарников Алексей Владимирович
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: kazarnikov@gmail.com

Ревина Светлана Васильевна
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: svrevina@srfedu.ru

BIFURCATIONS IN RAYLEIGH
REACTION-DIFFUSION SYSTEM

Kazarnikov A. V., Revina S. V.

We consider a reaction diffusion system with cubic nonlinear term which is the special case of Fitzhugh–Nagumo model and infinite-dimensional version of classical Rayleigh system. Homogeneous Neumann boundary conditions are set on the boundary. We found critical values of control parameter at which Hopf bifurcation occurs or branching of secondary stationary solutions takes place and constructed the asymptotics for these solutions. In 1D case we showed the existence of infinite-dimensional invariant subspaces in the system, discovered additional symmetries, studied the bifurcations and stability of secondary solutions on these invariant subspaces.

Key words: Lyapunov–Schmidt reduction, reaction-diffusion systems, pattern formation.

ПРИЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА ЭРДЕЙИ — КОБЕРА
К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ПОЛИПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Ш. Т. Каримов

В работе исследуется аналог второй краевой задачи для сингулярного полипараболического уравнения с оператором Бесселя. В отличие от традиционных методов, применяя оператор Эрдейи — Кобера дробного порядка, найдена явная формула решения поставленной задачи.

Ключевые слова: сингулярное полипараболическое уравнение, оператор Бесселя, оператор Эрдейи — Кобера дробного порядка.

1. Введение. Постановка задачи

Сингулярные параболические уравнения с оператором Бесселя относятся к классу уравнений, вырождающихся на границе области по пространственным переменным, и часто встречаются в приложениях (см., например, [1]). Вырождающиеся уравнения представляют собой один из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными, и число опубликованных работ по этой тематике весьма значительно. Среди них особое место занимают начальные и краевые задачи для параболических уравнений с оператором Бесселя. Теория классических решений задачи Коши для параболических уравнений с оператором Бесселя второго порядка развита в работах В. В. Крехивского и М. И. Матийчука [2], И. А. Киприянова, В. В. Катрахова и В. М. Ляпина [3], С. А. Терсенова [4], А. Б. Муравник [5] и др. Однако начальные и краевые задачи для уравнений с оператором Бесселя высокого порядка к настоящему времени остаются малоизученными.

В данной работе для сингулярного полипараболического уравнения, т. е. для уравнения с оператором Бесселя вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - B_{\gamma}^x\right)^m u(x, t) = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

где $\gamma \in R$, $\gamma > -\frac{1}{2}$, m — натуральное число,

$$B_\gamma^x \equiv x^{-2\gamma-1} \frac{\partial}{\partial x} x^{2\gamma+1} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\gamma+1}{x} \frac{\partial}{\partial x}$$

— дифференциальный оператор Бесселя, исследована следующая задача: найти классическое решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным:

$$\left(\frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right) \Big|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad x > 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (2)$$

и граничным:

$$\left(\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}} \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad t > 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (3)$$

условиям, где $\varphi_k(x)$, $k = 0, \dots, m-1$, — заданные непрерывные функции.

Отметим, что в задачах общей теории дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих оператор Бесселя по одной или нескольким переменным, основным аппаратом исследования является соответствующее интегральное преобразование Фурье — Бесселя. В отличие от традиционных методов, для решения поставленной задачи применим оператор Эрдейи — Кобера дробного порядка. Поэтому сначала приведем некоторые свойства этого оператора.

2. Операторы Эрдейи — Кобера

В теории и приложениях широко используются различные модификации и обобщения классических операторов интегрирования и дифференцирования дробного порядка. К таким модификациям относятся, в частности, операторы Эрдейи — Кобера [6]:

$$I_{\eta, \alpha} f(x) = \frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - \xi^2)^{\alpha-1} \xi^{2\eta+1} f(\xi) d\xi, \quad (4)$$

где $\alpha, \eta \in R$, $\alpha > 0$, $\eta \geq -\frac{1}{2}$, $f(x) \in L_1(0, b)$, $b > 0$, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера.

Основные свойства этого оператора можно найти в работе [6].

Оператор, обратный оператору (4), при $0 < \alpha < 1$ имеет вид

$$I_{\eta,\alpha}^{-1}g(x) = \frac{x^{-2\eta-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x^2 - s^2)^{-\alpha} s^{2(\eta+\alpha)+1} g(s) ds. \quad (5)$$

Пусть функция $u(x, t)$ по переменной x имеет непрерывные производные до порядка $2m$ включительно, а по t — порядка не меньше, чем m ; L — линейный дифференциальный оператор любого конечного порядка по переменной t , не зависящий от x ; $[B_\eta^x]^0 = E$, E — единичный оператор, $[B_\eta^x]^m = [B_\eta^x]^{m-1}[B_\eta^x] = [B_\eta^x][B_\eta^x] \dots [B_\eta^x]$ — m -я степень оператора Бесселя.

В работе [8] доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\alpha > 0$, $\eta \geq -\frac{1}{2}$, $x^{2\eta+1}[B_\eta^x]^k u(x, t)$ интегрируемы при $x \rightarrow 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\eta+1} \frac{\partial}{\partial x} [B_\eta^x]^k u(x, t) = 0$, $k = 0, \dots, m-1$. Тогда

$$(L \pm B_{\eta+\alpha}^x)^m I_{\eta,\alpha}^{(x)} u(x, t) = I_{\eta,\alpha}^{(x)} (L \pm B_\eta^x)^m u(x, t).$$

Здесь верхний индекс x в операторе $I_{\eta,\alpha}^{(x)}$ означает переменную, по которой действует этот оператор.

Теорема 2. Пусть $0 < \alpha < 1$, $\eta \geq -\frac{1}{2}$, $g(x) \in C^{2m}(0, b)$, $b > 0$, функции $x^{2(\eta+\alpha)+1}[B_{\eta+\alpha}^x]^{k+1}g(x)$ интегрируемы при $x \rightarrow 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2(\eta+\alpha)+1} \frac{d}{dx} [B_{\eta+\alpha}^x]^k g(x) = 0$, $k = 0, \dots, m-1$. Тогда

$$[B_\eta^x]^m I_{\eta,\alpha}^{-1}g(x) = I_{\eta,\alpha}^{-1} [B_{\eta+\alpha}^x]^m g(x).$$

В частности, при $\eta = -\frac{1}{2}$ и выполнении остальных условий теоремы 2 имеет место равенство

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} I_{-\frac{1}{2},\alpha}^{-1}g(x) = I_{-\frac{1}{2},\alpha}^{-1} [B_\gamma^x]^m g(x), \quad \gamma = \alpha - \frac{1}{2}. \quad (6)$$

3. Приложение оператора Эрдейи — Кобера

Предположим, что решение задачи (1)–(3) существует. Это решение будем искать в виде

$$u(x, t) = I_{-\frac{1}{2},\alpha}^{(x)} v(x, t), \quad (7)$$

где $\alpha = \gamma + \frac{1}{2} > 0$, а $v(x, t)$ — неизвестная гладкая функция.

Подставляя (7) в уравнение (1) и начальные условия (2), а затем, используя теорему 1 при $L \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ и учитывая условия (3), получим следующую задачу нахождения решения $v(x, t)$ уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^m v(x, t) = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (8)$$

удовлетворяющее начальным:

$$\left(\frac{\partial^k v}{\partial t^k} \right) \Big|_{t=0} = \Phi_k(x), \quad x > 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (9)$$

и однородным граничным:

$$\left(\frac{\partial^{2k+1} v}{\partial x^{2k+1}} \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad t > 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (10)$$

условиям, где

$$\Phi_k(x) = I_{-\frac{1}{2}, \alpha}^{-1} \varphi_k(x). \quad (11)$$

Учитывая граничные условия (10), продолжим функции $\Phi_k(x)$ четным образом на $x < 0$ и продолженные функции обозначим через $\tilde{\Phi}_k(x)$. Тогда в верхней полуплоскости получим задачу нахождения решения уравнения (8), удовлетворяющее начальным условиям

$$\left(\frac{\partial^k v}{\partial t^k} \right) \Big|_{t=0} = \tilde{\Phi}_k(x), \quad x \in R, \quad k = 0, \dots, m-1. \quad (12)$$

Введем обозначения:

$$w_0(x, t) = v(x, t), \quad w_k(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^k w_0(x, t).$$

В этих обозначениях задача (8), (12) эквивалентна следующей задаче о нахождении функций $w_k(x, t)$, $k = 0, \dots, m-1$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial w_k}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} = w_{k+1}, & k = 0, \dots, m-2, \\ \frac{\partial w_{m-1}}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_{m-1}}{\partial x^2} = 0, \end{cases} \quad (13)$$

и начальным условиям

$$w_k(x, 0) = \psi_k(x), \quad x \in R, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (14)$$

где

$$\psi_k(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j \tilde{\Phi}_{k-j}^{(2j)}(x), \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (15)$$

$C_k^j = \frac{k!}{[j!(k-j)!]}$ — биномиальные коэффициенты.

При решении задачи (13), (14) используется следующая лемма.

Лемма 1. Если $g(x) \in L_1(R)$, то имеет место равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_0^t \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(t-\eta)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\eta)} \right] d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) \exp \left[-\frac{(s-\xi)^2}{4\eta} \right] ds = \\ = \frac{t}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) \exp \left[-\frac{(s-x)^2}{4t} \right] ds. \end{aligned}$$

Эта лемма, после смены порядка интегрирования в правой части последнего равенства, доказывается непосредственным вычислением внутреннего интеграла по формуле [9, с. 344]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp [-p\xi^2 - q\xi] d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp \left(\frac{q^2}{4p} \right), \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Теперь, последовательно решая каждое уравнение системы (13), начиная с последнего, и используя начальные условия (14) и лемму 1, находим решение задачи (13), (14). Затем, учитывая $w_0(x, t) = v(x, t)$, получим решение задачи (8), (12) в виде

$$v(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k(s) \exp \left[-\frac{(s-x)^2}{4t} \right] ds, \quad (16)$$

где $\psi_k(x)$ — известные функции, определяемые равенствами (15).

Принимая во внимание четность функций $\psi_k(x)$, $k = 0, \dots, m-1$, равенство (16) перепишем в виде

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} v_k(x, t). \quad (17)$$

Здесь

$$v_k(x, t) = \int_0^{+\infty} \psi_k(s) G_0(x, t, s) ds, \quad (18)$$

$$G_0(x, t, s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp \left[-\frac{(s-x)^2}{4t} \right] + \exp \left[-\frac{(s+x)^2}{4t} \right] \right\}.$$

Чтобы исследовать поведение функций $\psi_k(x)$, $k = 0, \dots, m-1$, сделаем некоторые преобразования. С этой целью введем обозначение $R^+ = \{x \in R : x > 0\}$ и докажем следующую лемму.

Лемма 2. Пусть функции $\varphi_j(x) \in C^{2(m-j)-1}(R^+)$, $j = 0, \dots, m-1$, непрерывны, ограничены, и все производные функции $\varphi_j(x)$ до порядка $2(m-j)-1$, $j = 0, \dots, m-1$, включительно обращаются в нуль при $x = 0$. Тогда имеют место равенства

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\alpha} \frac{d}{dx} [B_\gamma^x]^p \varphi_{k-j}(x) = 0, \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [B_\gamma^x]^j \varphi_{k-j}(x) = 0, \quad (20)$$

$$p = 0, \dots, j, \quad j = 0, \dots, k, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Методом математической индукции можно доказать, что справедливо следующее равенство:

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^k f(x) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} A_{kj} \frac{f^{(k-j+1)}(x)}{x^{k+j-1}}, \quad (21)$$

где A_{kj} — постоянные, определяемые из рекуррентных равенств:

$$\begin{aligned} A_{(k+1)1} &= A_{k1} = 1, \quad k \geq 1, \\ A_{(k+1)j} &= (k+j-1)A_{k(j-1)} + A_{kj}, \quad k \geq 2, \quad j = 2, \dots, k, \\ A_{(k+1)(k+1)} &= (2k-1)A_{kk} = (2k-1)!!, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Равенство (19) перепишем в виде

$$\begin{aligned} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^{2\alpha} \frac{d}{dx} [B_\gamma^x]^p \varphi_{k-j}(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x^{1+2\alpha} \sum_{q=0}^p C_p^q (2\alpha)^{p-q} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^{p-q+1} \varphi_{k-j}^{(2q)}(x). \end{aligned}$$

Учитывая (21), имеем

$$h(x) = \sum_{q=0}^p C_p^q (2\alpha)^{p-q} \sum_{l=1}^{p-q+1} (-1)^{l+1} A_{(p-q+1)l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi_{k-j}^{(p-q-l+2)}(x)}{x^{p-q+l-1-2\alpha}}.$$

Применяя к последнему равенству правило Лопиталя $p-q+l-1$ раз [10, с. 270] и учитывая условия доказываемой леммы, получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi_{k-j}^{(p-q-l+2)}(x)}{x^{p-q+l-1-2\alpha}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\alpha} \varphi_{k-j}^{(2p+1)}(x)}{(-2\alpha)_{p-q+l-1}} = 0.$$

Отсюда следует справедливость равенства (19). Равенства (20) доказываются аналогично. \triangleright

Теперь преобразуем функции $\psi_k(x)$, $k = 0, \dots, m-1$. В силу леммы 2 для функций $\Phi_k(x)$ выполняются условия теоремы 2. Поэтому, учитывая обозначение (11) и формулу (6), равенство (15) при $x > 0$ можно представить в виде

$$\psi_k(x) = I_{-\frac{1}{2}, \alpha}^{-1} f_k(x), \quad (22)$$

где

$$f_k(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j [B_\gamma^x]^j \varphi_{k-j}(x), \quad k = 0, \dots, m-1. \quad (23)$$

Согласно формуле (5) равенство (22) перепишем в виде

$$\psi_k(x) = F_k'(x), \quad F_k(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x^2 - s^2)^{-\alpha} s^{2\alpha} f_k(s) ds. \quad (24)$$

Кроме того, в силу леммы 2 из равенства (23) следует, что функции $f_k(x)$ при $x \geq 0$ будут непрерывными, ограниченными и удовлетворяют равенствам $f_k(0) = 0$, $k = 0, \dots, m-1$. Если учесть это, то из последнего равенства следует, что $F_k(0) = 0$, $k = 0, \dots, m-1$.

Теперь, подставляя в равенство (18) выражение $\psi_k(x) = F_k'(x)$, а затем применяя правило интегрирования по частям и принимая во внимание равенство $F_k(0) = 0$, $k = 0, \dots, m-1$, получим

$$v_k(x, t) = - \int_0^\infty G_{0\xi}(x, t, \xi) F_k(\xi) d\xi.$$

Подставляя выражение (24) функции $F_k(x)$ в последний интеграл и учитывая равномерную сходимость интегралов, меняем порядок интегрирования:

$$v_k(x, t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{+\infty} f_k(s) s^{2\alpha} G_1(x, t, s) ds, \quad (25)$$

где

$$G_1(x, t, s) = \int_s^{+\infty} G_{0\xi}(x, t, \xi) (\xi^2 - s^2)^{-\alpha} d\xi. \quad (26)$$

Вычислим интеграл (26). Применяя формулу [9, с. 451]

$$\int_0^{+\infty} e^{-a\lambda^2} \cos(b\lambda) d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{4a}} \exp\left[-\frac{b^2}{4a}\right], \quad \operatorname{Re} a > 0,$$

функцию $G_0(x, t, s)$ представим в виде

$$G_0(x, t, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t\lambda^2} \cos(x\lambda) \cos(\xi\lambda) d\lambda.$$

Отсюда вычислим производную по ξ , и полученное выражение функции $G_{0\xi}(x, t, \xi)$ подставим в (26). Затем, принимая во внимание равномерную сходимость интегралов, меняем порядок интегрирования. После этого, применяя формулу Мелера — Сонина [7, с. 93], вычислим внутренний интеграл. В результате получим

$$\begin{aligned} G_1(\xi, s, t) &= -\frac{2^{\frac{1}{2}-\alpha}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1-\alpha) s^{\frac{1}{2}-\alpha} \times \\ &\times \int_0^{+\infty} e^{-t\lambda^2} \lambda^{\alpha+\frac{1}{2}} J_{\alpha-\frac{1}{2}}(\lambda s) \cos(x\lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (27)$$

где $J_\nu(t)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν [7, с. 12].

Теперь, подставляя (25) в (17), а (17) в (7), после смены порядка интегрирования, получим

$$u(x, t) = -\frac{2x^{1-2\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \int_0^{+\infty} f_k(s) s^{2\alpha} G_2(x, t, s) ds, \quad (28)$$

где

$$G_2(x, t, s) = \int_0^x (x^2 - \xi^2)^{\alpha-1} G_1(\xi, t, s) d\xi. \quad (29)$$

Далее преобразуем формулу (29). С этой целью подставляем (27) в (29) и меняем порядок интегрирования. Затем, вычислив внутренний интеграл с помощью формулы Пуассона [7, с. 93], имеем

$$G_2(x, t, s) = -\frac{1}{2} \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) \left(\frac{s}{x}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \times \\ \times \int_0^\infty e^{-t\lambda^2} J_{\alpha-\frac{1}{2}}(s\lambda) J_{\alpha-\frac{1}{2}}(x\lambda) \lambda d\lambda.$$

Теперь, учитывая формулу [7, с. 60]

$$\int_0^\infty e^{-t\lambda^2} J_\nu(s\lambda) J_\nu(x\lambda) \lambda d\lambda = \frac{1}{2t} e^{-\frac{x^2+s^2}{4t}} I_\nu\left(\frac{xs}{2t}\right), \\ \operatorname{Re} \nu > -1, \quad \operatorname{Re} t > 0,$$

имеем

$$G_2(x, t, s) = -\frac{1}{4t} \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) \left(\frac{s}{x}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} e^{-\frac{x^2+s^2}{4t}} I_{\alpha-\frac{1}{2}}\left(\frac{xs}{2t}\right), \quad (30)$$

где $I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя порядка ν [7].

Подставляя функцию (30) в формулу (28) и учитывая неравенства $\alpha = \gamma + \frac{1}{2} < 1$ и $\gamma > -\frac{1}{2}$, окончательно находим решение поставленной задачи (1)–(3) при $|\gamma| < \frac{1}{2}$:

$$u(x, t) = \frac{x^{-\gamma}}{2t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \int_0^{+\infty} f_k(s) s^{\gamma+1} \exp\left(-\frac{x^2+s^2}{4t}\right) I_\gamma\left(\frac{xs}{2t}\right) ds, \quad (31)$$

где $f_k(x)$ — известные функции, определяемые равенствами (23).

Из доказанного выше следует, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $|\gamma| < \frac{1}{2}$ и $\varphi_j(x) \in C^{2(m-j)-1}(R^+)$, $j = 0, \dots, m-1$, и все производные функции $\varphi_j(x)$ до порядка $2(m-j)-1$, $j = 0, \dots, m-1$, включительно обращаются в нуль при $x = 0$. Тогда функция $u(x, t)$, определяемая равенством (31), является классическим решением задачи (1)–(3).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $m = 1$ формула (31) совпадает с формулой работы [4], полученной другим методом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Этот метод можно применить и к решению задачи Коши для многомерного полипараболического уравнения с оператором Бесселя, действующим по всем пространственным переменным.

Литература

1. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. — М.: Физматлит, 2001. — 576 с.
2. Крехивский В. В., Матийчук М. И. Фундаментальные решения и задача Коши для линейных параболических систем с оператором Бесселя // Докл. АН СССР. — 1968. — Т. 181, № 6. — С. 1320–1323.
3. Киприянов И. А., Катрахов В. В., Ляпин В. М. О краевых задачах в области общего вида для сингулярных параболических систем уравнений // Докл. АН СССР. — 1976. — Т. 230, № 6. — С. 1271–1274.
4. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. — Новосибирск: Наука, 1985. — 105 с.
5. Муравник А. Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2014. — Т. 52. — С. 3–141.
6. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 702 с.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. — М.: Наука, 1974. — 296 с.
8. Каримов Ш. Т. Новые свойства обобщенного оператора Эрдейи — Кобера и их приложения // Докл. АН РУз. — 2014. — № 5. — С. 11–13.
9. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции / 2-е изд., исправ. — М.: Физматлит, 2002. — 632 с.
10. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1: Учеб. для вузов / 7-е изд. — М.: Физматлит, 2005. — 648 с.

КАРИМОВ Шахобиддин Тўйчибаевич
Ферганский государственный университет
УЗБЕКИСТАН, 150100, Фергана, ул. Мураббийлар, 19
E-mail: shaxkarimov@gmail.com

APPLICATION OF ERDÉLYI-KOBER OPERATOR
TO A SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR THE POLYPARABOLIC EQUATION
WITH BESSEL OPERATOR

Karimov Sh. T.

We study an analogue of the second boundary value problem for a singular polyparabolic equation with Bessel operator. Unlike traditional methods, application of the Erdélyi–Kober operator of fractional order yields an explicit formula for the solution to the problem.

Key words: singular polyparabolic equation, Bessel operator, Erdélyi–Kober fractional operator.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОЦЕНКИ
РОСТА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ
ЗАДАЧИ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ
ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА
ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДРОБНЫМИ
ПРОИЗВОДНЫМИ В МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ

М. В. Кукушкин

В данной работе получен результат, являющийся следствием вполне непрерывного вложения энергетического пространства, порожденного дифференциальным оператором второго порядка с дробными производными в младших членах, в исходное пространство Лебега суммируемых в квадрате функций. Доказана теорема, позволяющая охарактеризовать рост собственных значений задачи Штурма — Лиувилля для дифференциального оператора второго порядка с дробными производными в младших членах.

Ключевые слова: энергетическое пространство, дробное дифференцирование, оператор Римана — Лиувилля.

1. Введение

Считается известным (см., например, [1]), что вполне непрерывное вложение энергетического пространства, порожденного положительно определенным оператором, в исходное пространство дает возможность с помощью задания отношения частичного порядка на множестве положительно определенных операторов оценить собственные значения оператора собственными значениями оператора более простого типа. В работе [2] 1977 г. рассмотрена задача Штурма — Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с непрерывными коэффициентами при дробных производных в младших членах. Доказанная в работе [3] 2016 г. полуограниченность снизу оператора дробного дифференцирования, действующего в весовом пространстве Лебега суммируемых с квадратом функций, дает возможность перенести некоторые классические результаты теории положительно определенных операторов для оператора дробного дифференцирования, полуограниченного снизу.

В частности, важное значение имеет вопрос о вполне непрерывном вложении энергетического пространства, порожденного оператором дробного дифференцирования, в исходное пространство.

Будем полагать $\alpha \in (0, 1)$, $x \in (a, b) = \Omega \subset \mathbb{R}$. Интегрирование следует понимать в смысле Лебега. Для левостороннего, соответственно правостороннего, дробного интеграла порядка α будем использовать (см. [4]) следующие обозначения:

$$(I_{a+}^{\alpha} u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{u(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt,$$

$$(I_{b-}^{\alpha} u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{u(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt.$$

Для левосторонней, соответственно правосторонней, дробной производной порядка α

$$(D_{a+}^{\alpha} u)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{u(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt,$$

$$(D_{b-}^{\alpha} u)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{u(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt.$$

Также будем рассматривать сумму операторов дробного дифференцирования

$$D_{ab}^{\alpha} u = D_{a+}^{\alpha} u + D_{b-}^{\alpha} u.$$

Следуя [3], рассмотрим билинейную форму

$$h[u, v] = \frac{1}{2} \langle D_{a+}^{\alpha} u, v \rangle_{L_2} + \frac{1}{2} \langle u, D_{a+}^{\alpha} v \rangle_{L_2}.$$

Там же доказано, что пара, образованная данной билинейной формой и линейным множеством $I_{a+}^{\alpha}(L_2)$, образует унитарное (предгильбертово) пространство

$$N_{\alpha}(L_2) := \{u, v : u, v \in I_{a+}^{\alpha}(L_2), \langle u, v \rangle_{N_{\alpha}(L_2)} = h[u, v]\}.$$

В [5] доказано, что $N_{\alpha}(L_2)$ — полное гильбертово пространство.

Обозначим через λ_n собственные значения оператора задачи Штурма — Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах

$$Au = -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q_0 D_{ab}^\alpha u, \quad (1)$$

$$u(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad u(\partial\Omega) = 0, \quad (2)$$

со следующими предположениями относительно коэффициентов:

$$p(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad p_0 \leq p(x) \leq p_1, \quad p_0, q_0 = \text{const}, \quad p_0, q_0 > 0. \quad (3)$$

Будем также рассматривать вспомогательную задачу Штурма — Лиувилля в терминах (3) для коэффициентов и с краевыми условиями (2), собственные значения оператора которой обозначим как μ_n . Оператор вспомогательной задачи имеет вид

$$Bu = -\frac{d}{dx} \left(p_0 \frac{du}{dx} \right) + \frac{q_0(b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \quad (4)$$

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. Оператор A положительно определенный.

◁ Область определения оператора A является всюду плотным множеством в L_2 , это следует из включения $C_0^\infty \subset \mathfrak{D}(A)$. Покажем, что оператор A симметричный. Для $u, v \in \mathfrak{D}(A)$ имеем

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle_0 &= - \int_a^b v \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) dx + \\ &+ q_0 \int_a^b v D_{a+}^\alpha u dx + q_0 \int_a^b v D_{b-}^\alpha u dx. \end{aligned}$$

Применяя для первого слагаемого правой части последнего равенства формулу Грина, а также используя следствие 2 теоремы 2.4 из [4, с. 51] для третьего слагаемого (законность применения следствия 2 докажем ниже), имеем симметричное выражение

для $u, v \in \mathfrak{D}(A)$:

$$\langle Au, v \rangle_0 = \int_a^b p(x) \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx + q_0 \int_a^b v D_{a+}^\alpha u dx + q_0 \int_a^b u D_{a+}^\alpha v dx. \quad (5)$$

Докажем законность применения следствия 2 теоремы 2.4 из [4, с. 51]. Для этого покажем, что при условиях (2) имеет место $u \in I_{b-}^\alpha(L_p)$, $v \in I_{a+}^\alpha(L_q)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$. Это будет следовать из фундаментальности последовательности $\{\psi_\varepsilon(x)\}$ (см. [4, с. 181, формула (13.7)]) в L_p . Положим $u \in C^2(\bar{\Omega})$, используя обобщенное неравенство Минковского, для $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^b |\psi_{\varepsilon_1}(x) - \psi_{\varepsilon_2}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ & = \left(\int_a^b \left| \int_{x+\varepsilon_1}^b \frac{u(x) - u(\tau)}{(\tau - x)^{\alpha+1}} d\tau - \int_{x+\varepsilon_2}^b \frac{u(x) - u(\tau)}{(\tau - x)^{\alpha+1}} d\tau \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ & = \left(\int_a^b \left| \int_{x+\varepsilon_1}^{x+\varepsilon_2} \frac{u(x) - u(\tau)}{(\tau - x)^{\alpha+1}} d\tau \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ & = \left(\int_a^b \left| \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{u(x) - u(x+t)}{t^{\alpha+1}} dt \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} t^{-\alpha-1} \left(\int_a^b |u(x) - u(x+t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt \leq \\ & \leq \|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} t^{-\alpha} dt \leq \frac{M}{-\alpha+1} (\varepsilon_1^{-\alpha+1} - \varepsilon_2^{-\alpha+1}). \end{aligned} \quad (6)$$

Фундаментальность $\{\psi_\varepsilon(x)\}$, $\varepsilon \rightarrow 0$, доказана. В силу полноты $L_p(\Omega)$ существует $\psi_0(x) \in L_p(\Omega)$: $\psi_\varepsilon(x) \xrightarrow{L_p} \psi_0(x)$, из чего $u(x) \in I_{b-}^\alpha(L_p)$, $1 \leq p < \infty$, в силу теоремы 13.2 из [4, с. 183]. Доказательство принадлежности $v \in I_{a+}^\alpha(L_q)$, $1 \leq q < \infty$, полностью аналогично.

Доказательство возможности применения следствия 2 теоремы 2.4 из [4, с. 51] завершено. Из (5) получим представление для нормы в H_A :

$$\|u\|_{H_A}^2 = \langle Au, u \rangle_0 = \int_a^b p(x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + 2q_0 \int_a^b u D_{a+}^\alpha u dx, \quad u \in \mathfrak{D}(A). \quad (7)$$

Оценим снизу первое и второе слагаемые правой части последнего равенства. Для этого используем для первого и второго слагаемых соответственно неравенство Фридрихса (см. [6, с. 344, теорема 30.2]) и полуограниченность снизу оператора дробного дифференцирования (см. [3, лемма 1.1]). Имеем неравенство положительной определенности:

$$\langle Au, u \rangle_0 \geq \lambda^2 \|u\|_0^2, \quad \lambda = \left(\frac{p_0}{(b-a)^2} + \frac{q_0(b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, мы показали, что для оператора A имеет место неравенство положительной определенности, $\overline{\mathfrak{D}(A)} = L_2$, оператор A симметричный. Следовательно, оператор A положительно определен. \triangleright

Лемма 2. H_A как множество элементов совпадает с пространством $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

\triangleleft Предположим, что $u \in H_A$. По теореме 4.3.2 из [1, с. 68] существует последовательность $\{u_n\} \in \mathfrak{D}(A)$ такая, что $\|u_{n+m} - u_n\|_{H_A} \rightarrow 0$, $\|u_n - u\|_{L_2} \rightarrow 0$. Используя представление (7) для нормы в H_A , имеем

$$\begin{aligned} \|u_{n+m} - u_n\|_{H_A}^2 &= \int_a^b (u'_{n+m} - u'_n)^2 p(x) dx + \\ &+ 2q_0 \int_a^b (u_{n+m} - u_n) D_{a+}^\alpha (u_{n+m} - u_n) dx, \quad \{u_n\} \in \mathfrak{D}(A). \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку в силу леммы 1.1 [3] второе слагаемое правой части последнего равенства неотрицательно, то

$$\|u'_{n+m} - u'_n\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{p_0} \int_a^b (u'_{n+m} - u'_n)^2 p(x) dx \rightarrow 0. \quad (9)$$

Следовательно, в силу полноты пространства L_2 существует элемент $u_1 \in L_2$ такой, что $u'_n \xrightarrow{L_2} u_1$. Несложно показать (см., например, [1, с. 82]), что

$$u_n(x) \rightrightarrows u(x), \quad u(x) = \int_a^x u_1(t) dt = - \int_x^b u_1(t) dt. \quad (10)$$

Из чего следует, что $u(x) \in W_2^1(\Omega)$, $u(a) = u(b) = 0$, а значит, $u(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

Пусть теперь $u \in \overset{\circ}{W}_2^1$, покажем, что $u \in H_A$. Согласно теореме 4.3.2 из [1, с. 68] достаточно показать, что существует последовательность $\{u_n\} \in \mathfrak{D}(A)$ такая, что

$$\|u_{n+m} - u_n\|_{H_A} \rightarrow 0, \quad \|u_n - u\|_{L_2} \rightarrow 0. \quad (11)$$

Применим метод доказательства, использованный в [1, с. 83], и разложим производную u' в ряд Фурье по косинусам (это возможно, поскольку $u' — элемент пространства L_2):$

$$u'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi \frac{x-a}{b-a}, \quad (12)$$

$a_0 = 0$, поскольку $u(\partial\Omega) = 0$. Интегрируя почленно ряд Фурье (12), получим

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi \frac{x-a}{b-a}, \quad b_k = \frac{a_k(b-a)}{k\pi}. \quad (13)$$

Как известно из теории рядов Фурье, ряд (13) сходится равномерно (см. [7, с. 45, теорема 44]). Обозначив частичные суммы рядов (12) и (13) как u'_n и u_n соответственно, имеем

$$\|u_{n+m} - u_n\|_{H_A}^2 = \|(u_{n+m} - u_n)'\|_{L_2}^2 + \|u_{n+m} - u_n\|_{N_\alpha(L_2)}^2, \\ \{u_n\} \in \mathfrak{D}(A).$$

Первое слагаемое правой части последнего равенства стремится к нулю в силу сходимости по норме L_2 ряда (12). Оценим второе слага-

емое. Используя неравенство Коши — Буняковского, с учетом леммы 2.2 из [4, с. 43] и теоремы 3.5 из [4, с. 64], имеем

$$\begin{aligned} \|u_{n+m} - u_n\|_{N_\alpha(L_2)}^2 &= \langle u_{n+m} - u_n, D_{a+}^\alpha(u_{n+m} - u_n) \rangle_0 = \\ &= \langle u_{n+m} - u_n, I_{a+}^{1-\alpha}(u_{n+m} - u_n)' \rangle_0 \leq \\ &\leq \|u_{n+m} - u_n\|_0 \|I_{a+}^{1-\alpha}(u_{n+m} - u_n)'\|_0 \leq \\ &\leq C \|u_{n+m} - u_n\|_0 \|(u_{n+m} - u_n)'\|_0, \end{aligned} \quad (14)$$

из чего следует, что второе слагаемое также стремится к нулю в силу сходимости в L_2 рядов (12) и (13). Из сходимости по норме пространства L_2 ряда (13) также следует

$$\|u_n - u\|_{L_2} \rightarrow 0.$$

Мы показали, что существует последовательность $\{u_n\} \in \mathfrak{D}(A)$ со свойствами (11), значит, $u \in H_A$. \triangleright

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Используя неравенство положительной определенности для оператора дробного дифференцирования (см. [3, лемма 1.1]) при оценке снизу нормы H_A и неравенство (14) при оценке сверху нормы H_A , применяя неравенство Фридрихса, можно доказать эквивалентность норм H_A и $\overset{\circ}{W}_2^1$.

Лемма 3. Для функции $u \in H_A$ имеет место представление для нормы (7).

\triangleleft Докажем, что (7) верно для любой функции $u \in H_A$. Обозначим идеальный элемент (см. [8, с. 25]), полученный в результате пополнения унитарного пространства, образованного парой $(\|\cdot\|_{H_A}, \mathfrak{D}(A))$, через u^* . Заметим, что (7) можно переписать в терминах норм пространств:

$$\|u_n\|_{H_A}^2 = \|u_n'\|_{L_2(\Omega, p)}^2 + 2q_0 \|u_n\|_{N_\alpha(L_2)}^2. \quad (15)$$

Существует последовательность $\{u_n\} \subset \mathfrak{D}(A)$, $u_n \xrightarrow{H_A} u^*$. Сразу заметим, что из свойств нормы унитарного пространства следует $\|u_n\|_{H_A} \rightarrow M$ (формально полагаем $\|u^*\|_{H_A} = M$, таким образом расширяя норму $\|\cdot\|_{H_A}$ на элементы, не принадлежащие области определения оператора A). В силу сходимости последовательность $\{u_n\}$ фундаментальна в пространстве H_A . Это, в свою очередь, влечет, как было показано в ходе доказательства леммы 2, существование функции $u \in \overset{\circ}{W}_2^1$ такой, что $u_n \xrightarrow{\overset{\circ}{W}_2^1} u$. Из условия (3) на коэффициент $p(x)$ следует эквивалентность норм $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega, p)$. Значит,

$u'_n \xrightarrow{L_2(\Omega, p)} u'$, из чего, в свою очередь, с учетом свойства нормы следует

$$\|u'_n\|_{L_2(\Omega, p)} \rightarrow \|u'\|_{L_2(\Omega, p)}. \quad (16)$$

Покажем, что $\|u_n\|_{N_\alpha(L_2)} \rightarrow \|u\|_{N_\alpha(L_2)}$. Оценивая полностью аналогично (14), имеем

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{N_\alpha(L_2)}^2 &= \langle u_n - u, D_{a+}^\alpha(u_n - u) \rangle_0 = \\ &= \langle u_n - u, I_{a+}^{1-\alpha}(u_n - u)' \rangle_0 \leq \|u_n - u\|_0 \|I_{a+}^{1-\alpha}(u_n - u)'\|_0 \leq \\ &\leq C \|u_n - u\|_0 \|(u_n - u)'\|_0. \end{aligned} \quad (17)$$

Из чего следует

$$u_n \xrightarrow{N_\alpha(L_2)} u.$$

Используя общие свойства нормы, имеем

$$\|u_n\|_{N_\alpha(L_2)} \rightarrow \|u\|_{N_\alpha(L_2)}. \quad (18)$$

Осуществляя предельный переход в левой и правой части (15) с учетом (16) и (18), имеем представление для нормы в H_A :

$$\|u^*\|_{H_A}^2 = \|u'\|_{L_2(\Omega, p)}^2 + 2q_0 \|u\|_{N_\alpha(L_2)}^2. \triangleright \quad (19)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Доказательство существования предела (18) можно провести другим способом, попутно отметив интересный факт. Докажем включение $\overset{\circ}{W}_2^1 \subset I_{a+}^\alpha(L_2)$. Это будет следовать из фундаментальности последовательности $\{\psi_\varepsilon(x)\}$ (см. [4, с. 181, формула (13.7)]) в L_2 . Повторяя доказательство фундаментальности последовательности $\{\psi_\varepsilon(x)\}$, приведенное в лемме 1, придем к неравенству (6). Данное неравенство, осуществляя предельный переход, можно распространить на элементы пространства $\overset{\circ}{W}_2^1$ (полностью аналогичные рассуждения можно видеть в ходе доказательства теоремы 1 из [9, с. 351]). Таким образом, включение $\overset{\circ}{W}_2^1 \subset I_{a+}^\alpha(L_2)$ доказано. Заметим, что в силу теоремы о полноте (см. [5]), элементами пространства $N_\alpha(L_2)$ являются функции из класса $I_{a+}^\alpha(L_2)$. В силу доказанного в лемме 2 совпадения элементов пространств H_A и $\overset{\circ}{W}_2^1$, а также общих свойств нормы делаем вывод, что имеет место (18).

Следующая лемма сформулирована в терминах определения отношения частичного порядка на множестве положительно определенных операторов [1, с. 111].

Лемма 4. $\|u\|_{H_A} \geq \|u\|_{H_B}$.

◁ Сразу заметим, что пространства H_A и H_B в силу леммы 2 и согласно [1, с. 81] соответственно, как множества элементов, совпадают с W_2^1 . В силу условия (3) и леммы 1.1 из [3] имеем

$$\|u\|_{H_A}^2 = \|u'\|_{L_2(\Omega, p)}^2 + 2q_0\|u\|_{N_\alpha(L_2)}^2 \geq p_0\|u'\|_{L_2}^2 + q_1\|u\|_{L_2}^2 = \|u\|_{H_B}^2.$$

Следовательно,

$$\|u\|_{H_A} \geq \|u\|_{H_B}. \triangleright$$

3. Основная теорема

Теорема 1. Для собственных значений оператора задачи (1) имеет место оценка

$$\lambda_n \geq \frac{p_0\pi^2}{(b-a)^2}n^2 + \frac{q_0(b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

◁ В силу лемм 1, 4 для операторов A и B выполнены условия 1, 2 в определении отношения частичного порядка на множестве положительно определенных операторов [1, с. 111]. Покажем, что множество, ограниченное по норме пространства H_A , является компактным в L_2 . Это будет следовать из известной теоремы Реллиха о компактном вложении пространства Соболева в пространство Лебега суммируемых с квадратом функций (см. [10, с. 326]). Компактность в L_2 множества, ограниченного в пространстве H_B , следует в силу тех же рассуждений (см. [1, с. 102]). Таким образом, операторы A и B переводят ограниченное множество энергетического пространства в компактное множество исходного пространства. Следовательно, выполнены условия теоремы 5.10.1 из [1, с. 111], значит,

$$\lambda_n \geq \mu_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Учитывая, что согласно [1, с. 113]

$$\mu_n = \frac{p_0\pi^2n^2}{(b-a)^2} + \frac{q_0(b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

окончательно получим оценку собственных значений задачи Штурма — Лиувилля для дифференциального оператора второго порядка с дробной производной в младших членах:

$$\lambda_n \geq \frac{p_0 \pi^2 n^2}{(b-a)^2} + \frac{q_0(b-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad n = 1, 2, \dots \triangleright$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В доказательстве компактности вложения оператора A мы воспользовались влиянием старшего члена оператора, однако можно доказать компактность в L_2 множества, ограниченного в H_A другим методом. Данное доказательство само по себе представляет интерес, поскольку по сути является доказательством компактности вложения пространства, порожденного оператором дробного дифференцирования в пространство суммируемых с квадратом функций.

Литература

1. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. — М.: Высш. шк., 1977. — 431 с.
2. Нахушев А. М. Задача Штурма — Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // Докл. АН СССР. — 1977. — Т. 234, № 2. — С. 308–311.
3. Кукушкин М. В. О весовых пространствах дробно дифференцируемых функций // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Математика. Физика. — 2016. — Т. 42, № 6. — С. 60–69.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
5. Кукушкин М. В. Теорема о полноте пространства дробно-дифференцируемых функций // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Математика. Физика. — 2016. — Т. 43, № 13. — С. 53–59.
6. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985. — 589 с.
7. Харди Г. Х., Рогозинский В. В. Ряды Фурье. — М.: Либроком, 2009. — 152 с.
8. Морен К. Методы гильбертова пространства. — М.: Мир, 1965. — 570 с.
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 5, ч. 1. — М.: Физматлит, 1959. — 655 с.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4, ч. 1. — М.: Физматлит, 1974. — 336 с.

Кукушкин Максим Владимирович

ООО «Феникс»

РОССИЯ, 355003, Ставрополь, ул. Дзержинского, 156

E-mail: kukushkinmv@rambler.ru

ON A METHOD OF ESTIMATION OF THE GROWTH
OF EIGENVALUES OF THE STURM-LIOUVILLE PROBLEM
FOR A DIFFERENTIAL OPERATOR OF SECOND ORDER
WITH FRACTIONAL DERIVATIVES IN THE LOWER TERMS

Kukushkin M. V.

A theorem is proved that enables one to characterize the growth of eigenvalues of the Sturm–Liouville problem. The result is a consequence of the compact embedding of the energy space generated by a differential operator of second order with fractional derivatives in the lower terms.

Key words: energy space, fractional derivation, Riemann–Liouville operator.

О ЗАДАЧЕ РАСТЯЖЕНИЯ-КРУЧЕНИЯ КАНАТОВ

Н. В. Курбатова, Е. Н. Портнов,
Ю. А. Устинов

Дается краткое описание построения новой теории каната, опирающейся на спектральную теорию операторов. Получены новые формулы для расчета матрицы жесткостей и жесткости на растяжения в широком диапазоне изменения параметров. Результаты расчета иллюстрируются графиками.

Ключевые слова: теория канатов, матрица жесткостей, задача растяжения-кручения.

Введение

Существуют различные конструкции канатов, которые отличаются главным образом способом их плетения и профилем поперечного сечения проволоки, из которой они свиваются [1]. Такое разнообразие вызвано различными условиями их эксплуатации. Наибольшее распространение получили круглые стальные канаты одинарной и двойной свивок. У канатов одинарной свивки проволоки (волокна) располагаются по винтовым спиралям вокруг центрального прямолинейного волокна в несколько слоев. Канаты двойной свивки плетутся из прядей.

Известны два основных подхода к построению теории каната одинарной свивки (в дальнейшем канат ординарной свивки будем называть канатом). Один из таких подходов опирается на представление о канате, как о дискретной системе криволинейных стержней, и использует методы строительной механики [1, 2], второй подход основывается на уравнениях упругой сплошной среды с криволинейной анизотропией [3, 4].

В отличие от прямолинейных стержней, где все известные подходы к построению элементарной теории (метод гипотез, теория Сен-Венана, асимптотические методы теории упругости) дают один и тот же результат для жесткости каната на растяжение

$$B_r = ES, \quad (1)$$

где E — модуль Юнга, S — площадь поперечного сечения, в теории канатов разные подходы приводят к различным аналитическим выражениям для B_r .

Для иллюстрации разнообразия имеющихся формул приведем выражения B_r , полученные различными авторами:

- Гегауфф (1907 г., методами теории упругости):

$$B_r = ES_0 \cos^2(\alpha), \quad (2)$$

где S_0 — эффективная площадь поперечного сечения каната, α — угол между касательной к крайнему волокну и осью каната;

- Динник А. Н. (1957 г., методами строительной механики):

$$B_r = ES_0 \cos^4(\alpha); \quad (3)$$

- Глушко М. Ф. (1966 г., методами строительной механики):

$$B_r = \sum_{i=1}^n \left(ES_i \cos^3(\alpha_i) + r_i^{-2} I_{pi} (E \sin^4(\alpha_i) \cos^3(\alpha_i) + G \sin^6(\alpha_i) \cos^2(\alpha_i)) \right), \quad (4)$$

где n — число волокон в канате, G — модуль сдвига, S_i, I_{pi} — площадь поперечного сечения, полярный момент инерции i -го волокна соответственно, r_i — расстояние между осью каната и волокном, α_i — угол наклона волокна к оси каната;

- Мусалимов В. М., Мокряк С. Я. (1983 г., методом теории упругости спирально-анизотропного несжимаемого тела):

$$B_r = E' S_0 \Phi(\alpha),$$

$$\Phi(\alpha) = 1 + \frac{3a}{2} + \frac{9b \cos^2 \alpha}{2} + (9b + 3a) \operatorname{ctg}^2 \alpha \ln(\cos \alpha), \quad (5)$$

$$b = 1 - 3 \frac{1 - \nu'}{2 - \nu'}, \quad c = \frac{1}{2 - \nu'} - m, \quad m = \frac{2G'}{E'},$$

где E', G', ν' — модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно.

В работах [5–8] вводится понятие матрицы жесткостей d_{ij} , $i, j = 1, 2$, построение которой осуществлялось на основе решения Сен-Венана для цилиндра из волокнистого композита со слабым заполнителем. Поскольку построение решения связано с численным интегрированием дифференциального уравнения второго порядка, у которого коэффициент при старшей производной стремится к нулю

при стремлении к нулю модуля Юнга заполнителя, процесс численного интегрирования является неустойчивым и не позволяет получить точный результат в предельном случае, поэтому расчеты НДС дублировались построением конечно-элементного решения трехмерной задачи теории упругости для сплошного неоднородного цилиндра, образованного конечным числом упругих винтовых спиралей, соединенных слабым заполнителем.

В настоящей работе для определения НДС каната и его жесткостей d_{ij} используется новый подход, который позволяет получить выражения для элементов матрицы жесткостей в виде элементарных функций от параметра α .

1. Основные соотношения теории упругости в винтовой системе координат

Поясним основные идеи построения элементарной теории каната. Пусть на цилиндрическую поверхность малого радиуса наматываются слои упругих винтовых спиралей так, что шаг h каждой из них и, соответственно, крутка $\tau = \frac{2\pi}{h}$ остаются постоянными. Одновременно с намоткой осуществляется покрытие слоев полимерным связующим. После полимеризации связующих слоев получаем цилиндр из волокнистого композита.

Обозначим через E_1 , ν_1 модуль Юнга и коэффициент Пуассона винтовых спиралей, через E_2 , ν_2 — упругие характеристики заполнителя.

Для описания интегральных упругих свойств такого цилиндра поступим следующим образом. С геометрическим центром тяжести одного из торцов цилиндра совместим начало декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 , эту систему координат будем называть *основной*. Введем винтовую систему координат r, θ, z , связанную с основной соотношениями

$$x_1 = r \cos(\theta + \tau z), \quad x_2 = r \sin(\theta + \tau z), \quad x_3 = z. \quad (6)$$

Соотношения (6) при $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ являются параметрическими уравнениями винтового волокна.

Радиус-вектор точек волокна (линии) представим в виде

$$\mathbf{R} = r\mathbf{e}'_1 + z\mathbf{e}'_3. \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1 \cos(\theta + \tau z) + \mathbf{i}_2 \sin(\theta + \tau z), \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{i}_1 \sin(\theta + \tau z) + \mathbf{i}_2 \cos(\theta + \tau z) \end{aligned} \quad (8)$$

и $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — орты основной (декартовой) системы координат.

С винтовой линией свяжем естественный базис (репер Френе) $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{b}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{t}$ — орты главной нормали, бинормали и касательной соответственно. Ортогональная матрица перехода от базиса \mathbf{e}_j к базису \mathbf{e}'_i имеет вид

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix},$$

где

$$\alpha = \arctan(x), \quad x = r\tau.$$

Параметр τ в теории естественно закрученных стержней принято называть *круткой*. Материал цилиндра, полученный описанным выше способом, неоднороден, однако при достаточно большом количестве слоев намотки, основываясь на теории усреднения [9], его можно в каждой точке цилиндра рассматривать как локально трансверсально изотропный, при этом направление главной оси симметрии совпадает с вектором $\mathbf{e}_3 = \mathbf{t}$.

Для описания упругих свойств цилиндра будем использовать векторно-матричную форму обобщенного закона Гука [10]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} \mathbf{e}, \quad \mathbf{C} = (c_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, 6, \\ \mathbf{e} &= [e_1, \dots, e_6]^T, \quad \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \dots, \sigma_6]^T, \\ \sigma_1 &= \sigma_{11}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22}, \quad \sigma_3 = \sigma_{33}, \\ \sigma_4 &= \sigma_{23}, \quad \sigma_5 = \sigma_{13}, \quad \sigma_6 = \sigma_{12}, \\ e_1 &= e_{11}, \quad e_2 = e_{22}, \quad e_3 = e_{33}, \\ e_4 &= 2e_{23}, \quad e_5 = 2e_{13}, \quad e_6 = 2e_{12}, \end{aligned} \quad (9)$$

где σ_{ij} , e_{ij} — компоненты тензоров напряжений и малых деформаций соответственно.

Известно [10], что упругие свойства трансверсально изотропного материала определяются пятью техническими постоянными: модулями Юнга E , E' , коэффициентами Пуассона ν , ν' и модулем сдви-

га G' . Элементы матрицы \mathbf{C} выражаются через эти постоянные формулами

$$\begin{aligned}
c_{11} = c_{22} &= \frac{E(E' - E\nu'^2)}{E'(1 - \nu^2) - 2E\nu'^2(1 + \nu)}, \\
c_{12} &= \frac{E(\nu E' + \nu'^2 E\nu^2)}{E'(1 - \nu^2) - 2E\nu'^2(1 + \nu)}, \\
c_{13} = c_{23} &= \frac{EE'\nu'}{E'(1 - \nu) - 2\nu'^2 E}, \\
c_{33} &= \frac{E'^2(1 - \nu)}{E'(1 - \nu) - 2\nu'^2 E}, \\
c_{44} = c_{55} &= G', \quad c_{66} = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \\
c_{15} = c_{16} = c_{25} = c_{26} = c_{35} = c_{36} &= 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

На основе теории усреднения [9] имеем

$$\begin{aligned}
E &= \left[\frac{k_1(1 - \nu_1^2)}{E_1} + \frac{k_2(1 - \nu_2^2)}{E_2} + \frac{\nu'^2}{E'} \right]^{-1}, \\
\nu &= E \left[\frac{k_1(\nu_1 + \nu_1^2)}{E_1} + \frac{k_2(\nu_2 + \nu_2^2)}{E_2} - \frac{\nu'^2}{E'} \right], \\
G &= \left[\frac{2k_1(1 + \nu_1)}{E_1} + \frac{2k_2(1 + \nu_2)}{E_2} \right]^{-1}, \\
E' &= k_1 E_1 + k_2 E_2, \quad \nu' = k_1 \nu_1 + k_2 \nu_2, \quad k_1 + k_2 = 1,
\end{aligned} \tag{11}$$

где k_1, k_2 — концентрации по сечению, перпендикулярному \mathbf{e}_3 , несущих элементов и заполнителя соответственно.

В результате перехода в формулах (7), (8) от базиса \mathbf{e}_j к базису \mathbf{e}'_i получаем следующие соотношения обобщенного закона Гука в винтовой системе координат:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= c'_{11} e_{rr} + c'_{12} e_{\theta\theta} + c'_{13} e_{zz} + 2c'_{14} e_{\theta z}, \\
\sigma_{\theta\theta} &= c'_{12} e_{rr} + c'_{22} e_{\theta\theta} + c'_{23} e_{zz} + 2c'_{24} e_{\theta z}, \\
\sigma_{zz} &= c'_{13} e_{rr} + c'_{23} e_{\theta\theta} + c'_{33} e_{zz} + 2c'_{34} e_{\theta z}, \\
\sigma_{\theta z} &= c'_{14} e_{rr} + c'_{24} e_{\theta\theta} + c'_{34} e_{zz} + 2c'_{44} e_{\theta z}, \\
\sigma_{rz} &= c'_{55} e_{rz} + c'_{56} e_{r\theta}, \\
\sigma_{r\theta} &= c'_{56} e_{rz} + c'_{66} e_{r\theta}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
c'_{11} &= c_{11}, \quad c'_{12} = c_{12}l_c^2 + c_{13}l_s^2, \quad c'_{13} = c_{13}l_c^2 + c_{12}l_s^2, \\
c'_{14} &= l_cl_s(c_{13} - c_{12}), \\
c'_{23} &= c_{13}l_c^2 + (c_{11} + c_{33} - 4c_{44})l_c^2l_s^2 + c_{13}l_s^4, \\
c'_{24} &= -c_{11}l_c^3l_s - c_{13}(l_cl_s^3 - l_c^3l_s) + c_{33}l_cl_s^3 - 2c_{44}(l_cl_s^3 - l_c^3l_s), \\
c'_{33} &= c_{11}l_s^4 + 2c_{13}l_c^2l_s^2 + c_{33}l_c^4 + 4c_{44}l_c^2l_s^2, \\
c'_{34} &= -l_cl_s(c_{11}l_s^2 - c_{13} + 2c_{13}l_c^2 + 2c_{44}l_c^2 - 2c_{44}l_s^2), \\
c'_{44} &= c_{11}l_c^2l_s^2 - 2c_{13}l_c^2l_s^2 + c_{33}l_c^2l_s^2 + c_{44}(1 - 4l_c^2l_s^2), \\
c'_{55} &= c_{44}l_c^2 + c_{66}l_s^2, \quad c'_{56} = l_cl_s(c_{44} - c_{66}), \\
c'_{66} &= c_{66}l_c^2 + c_{44}l_s^2, \\
l_c &= \cos \alpha, \quad l_s = \sin \alpha, \quad \alpha = \arctan(\tau r),
\end{aligned} \tag{13}$$

где $r \in [0, a]$, a — внешний радиус каната.

Компоненты тензора деформаций в базисе винтовой системы координат выражаются через смещения следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
e_{rr} &= \partial_r u_r, \quad e_{\theta\theta} = u_r + \frac{\partial_\theta u_\theta}{r}, \quad e_{zz} = Du_z, \\
2e_{r\theta} &= \partial_r u_\theta + \frac{\partial_\theta u_r - u_\theta}{r}, \quad 2e_{\theta z} = \frac{\partial_\theta u_z}{r} + Du_\theta, \\
2e_{rz} &= \partial_r u_z + Du_r.
\end{aligned} \tag{14}$$

Уравнения равновесия в напряжениях в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + D\sigma_{rz} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + D\sigma_{\theta z} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + D\sigma_{zz} &= 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Используя соотношения (12)–(15), можно получить систему дифференциальных уравнений относительно компонент вектора смещений $\mathbf{u} = [u_r, u_\theta, u_z]^T$, которую символически запишем

$$L(\partial)\mathbf{u} = 0, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{16}$$

Условие отсутствия напряжений на боковой поверхности представим следующим образом:

$$N(\partial)\mathbf{u} = 0. \quad (17)$$

Если отыскивать решение в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}(r, \theta)e^{i\lambda z}, \quad (18)$$

после подстановки (18) в (16), (17), получим спектральную задачу на сечении:

$$Z(i\lambda)\mathbf{a} = \{L(i\lambda)\mathbf{a}, N(i\lambda)\mathbf{a}\} = 0. \quad (19)$$

Оператор Z имеет бесконечное множество собственных значений (СЗ), среди которых $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1^\pm = \pm\tau$ — четырехкратные. Линейные комбинации из собственных и присоединенных векторов этих СЗ определяют решение Сен-Венана задач растяжения-кручения, чистого изгиба и изгиба поперечными силами. Остальные СЗ — комплексные и симметрично расположены в комплексной плоскости [5–8]. Эти свойства позволяют общее решение для цилиндра представить в виде

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{12} C_n \mathbf{u}_n + \sum_k [C_k^+ \mathbf{u}(z, \lambda_k^+) + C_k^- \mathbf{u}(z - l, \lambda_k^-)], \quad (20)$$

где l — длина цилиндра C_n , C_k^\pm — произвольные постоянные, которые определяются при удовлетворении граничным условиям на торцах цилиндра $z = 0, l$, \mathbf{u}_n — элементарные решения Сен-Венана,

$$\mathbf{u}(z, \lambda_k) = \mathbf{a}_k e^{i\lambda_k z}, \quad (21)$$

λ_k^+ ($\text{Im } \lambda_k^+ > 0$), λ_k^- ($\text{Im } \lambda_k^- < 0$) — СЗ задачи (19), \mathbf{a}_k^+ , \mathbf{a}_k^- — соответствующие им собственные векторы. НДС, отвечающее этим решениям, самоуравновешено в каждом поперечном сечении цилиндра и экспоненциально затухает при удалении от торцов. Однако при слабом заполнителе, что в рассматриваемом случае эквивалентно неравенству $m = \frac{E_2}{E_1} \ll 1$ (материал по поперечному сечению сильно неоднороден), процедура усреднения приводит к тому, что $E \ll E'$, т. е. материал, полученный после процедуры усреднения, обладает сильной анизотропией. Исследования, проведенные в работах [11, 12]

для слоистых плит и цилиндров, показали, что существует конечное число λ_k^\pm , мнимая часть которого при $m \rightarrow 0$ стремится к нулю. Отвечающие таким собственным значениям элементарные решения при соответствующих граничных условиях на торцах могут оказывать существенное влияние на внутреннее НДС цилиндра и его жесткости. Наличие в решении трехмерной задачи (20) слабо затухающих элементарных решений приводит к нарушению принципа Сен-Венана для цилиндрических тел из композитных материалов со слабым заполнителем. В случае каната можно привести примеры самоуравновешенных нагрузок, которые, будучи приложенными к одному из торцов каната со свободным другим, приведут к его разрушению.

2. Построение элементов матрицы жесткостей каната

Для цилиндра с винтовой анизотропией построение решения Сен-Венана задачи растяжения-сжатия приводит к следующим соотношениям [5–8] :

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^a \sigma_{zz} r dr &= d_{11}C_1 + d_{12}C_2 = P_z, \\ 2\pi \int_0^a \sigma_{z\theta} r^2 dr &= d_{12}C_1 + d_{22}C_2 = M_z, \end{aligned} \quad (22)$$

где P_z , M_z — проекции главного вектора и главного момента напряжений, действующих в поперечном сечении, $C_1 = \varepsilon$, $C_2 = \varphi$ — произвольные постоянные, первую из которых можно интерпретировать как относительное удлинение оси каната, вторую — относительный угол его поперечного сечения.

Канат будем рассматривать, как описанный выше цилиндр из композитного материала, у которого $E_2 = 0$, $\nu_2 = 0$. В этом случае из соотношений (10), (11) вытекает, что отличным от нуля будет только три элемента матрицы модулей \mathbf{C}

$$c_{33} = E' = k_1 E_1, \quad c_{44} = c_{55} = G' = k_1 G_1, \quad G' = \frac{E'}{2(1 + \nu_1)}. \quad (23)$$

После преобразований соответствующей матрицы жесткостей \mathbf{C}' к винтовой системе координат получаем следующие выражения для напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \\ \sigma_{zz} &= c'_{23}e_{\theta\theta} + c'_{33}e_{zz} + c'_{34}e_{\theta z}, \\ \sigma_{\theta z} &= c'_{24}e_{\theta\theta} + c'_{34}e_{zz} + c'_{44}e_{\theta z}, \\ \sigma_{rz} &= c'_{55}e_{rz} + c'_{56}e_{r\theta}.\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}c'_{23} &= \frac{\sin(2\alpha)^2(-4G' + E')}{4}, \\ c'_{33} &= \cos(\alpha)^4 E' + \sin(2\alpha)^2 G', \\ c'_{34} &= \frac{\cos(\alpha)^2 \sin(2\alpha) E' - \sin(4\alpha) G'}{2}, \\ c'_{44} &= \cos(2\alpha)^2 G' + \frac{\sin(2\alpha)^2 E'}{4}, \\ c'_{55} &= \cos(\alpha)^2 G', \quad c'_{56} = \frac{\sin(2\alpha) G'}{2}.\end{aligned}\tag{25}$$

Все остальные элементы матрицы \mathbf{C}' равны нулю.

Для задачи растяжения вектор смещения имеет вид

$$\mathbf{u}^{(1)} = \left(a^{(1)}(r), 0, \varepsilon z + u_z^0 \right),\tag{26}$$

где u_z^0 — произвольная постоянная, которую можно интерпретировать как поступательное смещение, параллельное оси Oz .

Для данного смещения отличные от нуля компоненты тензора напряжений имеют следующий вид:

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \frac{E'}{1 + kt^2} \varepsilon, \quad \sigma_{\theta z}^{(1)} = \frac{E't}{2(1 + kt^2)} \varepsilon.\tag{27}$$

Для задачи кручения вектор смещения имеет вид

$$\mathbf{u}^{(2)} = \left(a^{(2)}(r), 0, \varphi rz + u_z^0 \right),\tag{28}$$

где φ — произвольная постоянная, которую можно интерпретировать как относительный угол поворота поперечного сечения каната.

При $\mathbf{u}^{(2)}$ отличные от нуля компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\sigma_{zz}^{(2)} = \frac{E't}{2(1 + kt^2)} a\varphi, \quad \sigma_{\theta z}^{(2)} = \frac{E'r}{2(1 + kt^2)} \varphi,\tag{29}$$

где

$$t = \tan \alpha, \quad t_1 = \tan \beta, \quad \beta = \tau a,$$

$$k = \frac{1 + \nu_1}{2} = \frac{E'}{4G'}, \quad r = \frac{at}{t_1}.$$

Главный вектор и главный момент напряжений, действующих в поперечном сечении каната $z = \text{const}$, определяются следующими соотношениями:

$$P_z = d_{11}\varepsilon + d_{12}\varphi, \quad M_z = d_{21}\varepsilon + d_{22}\varphi, \quad (30)$$

где

$$d_{11} = \frac{\pi a^2 E' \ln(1 + kt_1^2)}{t_1 k},$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{1}{2} \frac{\pi a^3 E' (kt_1^2 - \ln(1 + kt_1^2))}{t_1^2 k^2}, \quad (31)$$

$$d_{22} = \frac{1}{2} \frac{\pi a^4 E' (kt_1^2 - \ln(1 + kt_1^2))}{t_1^3 k^2}.$$

3. Жесткость каната на растяжение

Из соотношений (22) следует, что жесткость каната на растяжение и кручение существенно зависит от граничных условий на торцах каната $z = 0, L$.

Жесткости на растяжение. Пусть канат подвержен воздействию растягивающей силы так, что $\varphi = 0$, $M \neq 0$ (подвешенный к концу каната груз весом P совершает движение в лифте с постоянной скоростью). Тогда из соотношений (22) вытекает, что в этом случае в канате возникает крутящий момент $M_z = d_{12}\varepsilon$, а жесткость на растяжение определяется следующими соотношениями:

$$P = D_\varphi \varepsilon, \quad D_\varphi = d_{11}$$

Если предположить, что канат подвержен воздействию растягивающей силы P , а $M = 0$ (к концу каната свободно подвешен груз весом P), то в этом случае жесткость на растяжение определяется следующими соотношениями:

$$P = D_M \varepsilon, \quad D_M = d_{11} - \frac{d_{12}^2}{d_{22}}.$$

Приведем графики (рис. 1), иллюстрирующие зависимости D_φ , D_M от параметра β .

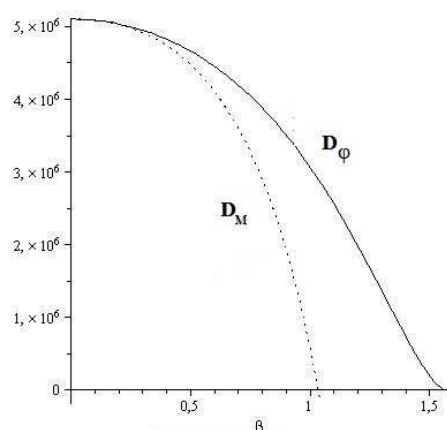


Рис. 1. Жесткости на растяжение D_φ ($\varphi = 0, M \neq 0$), D_M ($M = 0, \varphi \neq 0$).

Литература

1. Глушко М. Ф. Стальные подъемные канаты. — Киев: Техника, 1966. — 323 с.
2. Динник А. Н. Статьи по горному делу. — М.: Углетехиздат СССР, 1957. — 202 с.
3. Thwaites J. J. Elastic deformation of rod with helical anisotropy // Int. J. Mech. Sci. — 1977. — Vol. 19, № 3. — P. 161–169.
4. Мусалимов В. М., Мокряк В. М. О некоторых задачах для спирально-изотропной среды // Механика сплошных сред. — Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 1983. — С. 88–96.
5. Устинов Ю. А. Задачи Сен-Венана для стержня с винтовой анизотропией // Докл. РАН. — 2001. — Т. 380, № 6. — С. 770–773.
6. Устинов Ю. А. Решение задач Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией // Прикл. мат. и мех. — 2003. — Т. 64, вып. 1. — С. 89–98.
7. Устинов Ю. А. Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. — М.: Физматлит, 2003. — 125 с.
8. Устинов Ю. А. Некоторые задачи для упругих цилиндрических тел с винтовой анизотропией // Успехи механики. — 2003. — № 4. — С. 37–62.
9. Победря Б. Е. Механика композитных материалов. — М.: МГУ, 1984. — 336 с.
10. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977. — 416 с.
11. Устинов Ю. А. О структуре погранслоя в слоистых плитах // Докл. АН СССР. — 1976. — Т. 229, № 2. — С. 325–328.
12. Ахметов Н. К., Устинов Ю. А. О принципе Сен-Венана в задаче кручения слоистого цилиндра // Прикл. мат. и мех. — 1988. — Т. 52, вып. 2. — С. 264–268.

КУРБАТОВА НАТАЛЬЯ ВИКТОРОВНА
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: nvk-ru@yandex.ru

ПОРТНОВ ЕВГЕНИЙ НИКОЛАЕВИЧ
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: djonatan-91@mail.ru

УСТИНОВ ЮРИЙ АНАТОЛЬЕВИЧ
Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
E-mail: ustinov_rsu@mail.ru

ON THE PROBLEM OF ROPES DILATION-TORSION

Kurbatova N. V., Portnov E. N., Ustinov Yu. A.

This is a brief overview of a new theory of ropes based on the spectral theory of operators. New formulae for the calculation of the stiffness matrix are constructed. The results of the calculation concerning of rigidity in a wide range of parameters are illustrated by graphs.

Key words: theory of ropes, stiffness matrix, dilation-torsion problem.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЧИСЛЕННОСТИ ПОКОЛЕНИЙ С ВЛИЯНИЕМ МЕНЯЮЩЕЙСЯ СКОРОСТИ РОСТА ОСОБЕЙ ВОЛЖСКИХ ОСЕТРОВЫХ¹

А. Ю. Переварюха

Развиваются методы моделирования репродуктивного цикла популяций с учетом меняющихся эколого-физиологических особенностей осетровых рыб Каспийского моря. Во многих случаях изменение динамики роста определяет эффективность воспроизводства, что особенно актуально для технологии искусственного поддержания минимально необходимой численности вида. Система трех дифференциальных уравнений для описания взаимосвязи убыли численности поколения и приращения веса молоди рыб дополнена с учетом отмечаемых в наблюдениях колебаний скорости роста молоди. Предложена новая непрерывно-дискретная модель для вычислительного исследования на основе биологического обоснования, что темп развития резко изменяется при переходе к следующей стадии развития, но остается в обратной зависимости от плотности особей на ограниченном промежутке раннего онтогенеза. Уравнения предназначены для сценарного моделирования в актуальной задаче анализа эффективности искусственной интродукции выращенных в различных условиях особей в естественную среду.

Ключевые слова: модель восстановления популяции, уравнения скорости роста, эффективность интродукции осетровых, вычислительные сценарии.

1. Введение

При оценке перспектив восстановления популяции рыб после интенсивного вылова пользуются некоторым упрощенным представлением о принципах протекания процесса регенерации. Обычно полагают, что учет не кажущихся основными факторов внесет незначительные количественные поправки в результат моделирования, который в случае популяционных процессов массовых не заботящихся о потомстве видов и так будет достаточно приближительным. Однако, как показывает ряд современных ситуаций, рассмотрение дополнительных явлений, пусть проявляющихся только в некоторых специ-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-07-01230.

фических условиях, изменяет качественное поведение динамической модели. Подобные явления появляются как пороговые эффекты при выходе процесса из среднесного оптимума, и потому их последствия достаточно сложно предвидеть специалистам. Резкий крах рыбного промысла произошел в 1992 г. в Канаде для атлантической трески, когда не оправдались никакие оценки по срокам восстановления запасов. Изолированные популяции осетровых рыб Каспийского моря переживают схожую ситуацию неопределенности.

Разрабатывать популяционную модель можно, исходя из нескольких методологических принципов, но они, к сожалению, сложно взаимно стыкуются. Можно выделить два обширных направления методов моделирования водных экосистем: трофическую динамику, описывающую производство и перенос энергии по пищевой цепи, и модели формирования поколений. Данный подход математической экологии предполагает построения систем балансовых дифференциальных уравнений для биомасс каждого элемента трофической цепи. Второй подход обычно использует дискретные итерационные конструкции на основе матриц и описывает изменение возрастной структуры популяций. Для практических задач рациональной эксплуатации ценность представляет второй подход, в то же время он имеет больше перспектив для совершенствования. Для долго созревающих крупных рыб семейств *Acipenseridae* и *Gadidae* перспективным решением видится переход от матрицы пронумерованной последовательности поколений к более естественному для физиологических особенностей рассмотрению этапов развития молоди рыб и стадиям зрелости для взрослых особей на основе разрывных дифференциальных уравнений².

2. Критерии Сингера и модели динамики популяций

Для динамики численности биологических сообществ характерно саморегулирование. Внутрипопуляционным механизмом регуляции, влияющим на динамику популяций осетровых рыб и лососевых, является сложная зависимость в факторах воспроизводства. Подобная зависимость естественно возникает между родительским запасом, который нерестует на ограниченных русловых участках с пригодным для кладки икры грунтом, и формирующимся в результате реализации его репродуктивного потенциала новым поколением рыб.

²Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-07-01230.

В ихтиологии предлагались математические модели для формализации зависимости пополнения R от запаса S , в частности, известна модель (stock-recruitment) У. Рикера:

$$R = aSe^{-bS},$$

где a — безразмерный параметр, характеризующий репродуктивный потенциал популяции, b отражает влияние лимитирующих зависящих от плотности факторов. У. Рикер в работе [1] обосновал на богатом фактическом материале теорию формирования пополнения популяций рыб. Использование расчетов нелинейности $R = f(S; a)$ на практике оказалось связано с противоречивыми результатами.

Проблема несоответствия прогнозов и данных наблюдений связана с тем, что не анализировались свойства динамических систем $M\langle\Omega, t, \psi\rangle$, где $\psi(x_0; \mathbf{a})$ — оператор эволюции, формализация некоторой параметрической зависимости между основными величинами, характеризующими развитие процесса. Для итераций популяционной модели Рикера $R_{n+1} = aR_n \exp(-bR_n)$ у траектории $M\langle\mathbb{R}, n, \psi^n(R_0; \mathbf{a})\rangle$ наблюдается возникновение топологически неэквивалентных фазовых портретов.

Условие первого метаморфоза поведения M определяется тогда, когда производная в неподвижной точке x^* перестанет удовлетворять критерию устойчивости $|\psi'(x^*)| < 1$, следующему из теоремы Гробмана — Хартмана [2]. Для однопараметрического семейства отображений $\psi : I \rightarrow I$ класса гладкости C^2 с условиями: $\psi'_x(x^*) = v(a)$, $\psi'(x) \neq 0$, если $x \neq c$, $\psi''(c) \neq 0$ при $a = \bar{a}$ таком, что $\psi'(x^*) = -1$, наблюдается следующая ситуация для $\psi^2(x)$ в те-ряющей устойчивости x^* :

$$\frac{d\psi^2(x^*)}{dx} = 1, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi^2(x)}{dx^2} &= \psi''(\psi(x))(\psi'(x))^2 + \psi'(\psi(x))\psi''(x), \\ \frac{d^2\psi^2(x^*)}{dx^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Следовательно, $\frac{d\psi^2(x)}{dx}$ при $a = \bar{a}$ имеет в x^* локальный экстремум, который при выполнении $\frac{d^3\psi^2(x)}{dx^3} < 0$ будет максимумом, и тогда с появлением двух неподвижных точек x_1^* , x_2^* для $\psi^2(x)$ возникает бифуркация удвоения периода.

Дифференциальный инвариант Шварца

$$H_\psi = \frac{\psi'''(x)}{\psi'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} \right)^2$$

обладает свойством сохранять знак при итерациях, т. е. если $H_f < 0$, то $H_{f^n} < 0$, а с учетом (1) и (2) получаем

$$H_{\psi^2(x^*)} = \frac{d^3\psi^2(x)}{dx^3}.$$

Легко показать, что для $R_{n+1} = aR_n \exp(-bR_n)$ $H < 0$ при $x \in \mathbb{R}$.

При плавном увеличении бифуркационного параметра в области значений $a > e^2$ происходит переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Изменение поведения системы через бесконечный каскад бифуркаций известно как сценарий М. Фейгенбаума [3]. Переход к хаосу реализуется в дифференцируемых одномерных отображениях при выполнении критериев теоремы Д. Сингера [4], доказавшего, что отображение унимодальной функции с сохраняющим знак $H_\psi < 0$ (см. критерии Сингера) может иметь не более одной устойчивой периодической траектории. Эта траектория является ω -предельным множеством для точки $c: \psi'(c) = 0$.

Общепринятого математического определения явления хаоса не существует. Известно несколько предложенных определений понятия «хаос». Для вычислительного анализа свойств динамики одномерных функциональных итераций $f: I \rightarrow I$ удобно воспользоваться результатами М. Веллекупа и Р. Берглунда из работы [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение $f: I \rightarrow I$ обладает *хаотической динамикой*, если для f выполняется свойство транзитивности: для всех открытых $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$ и $Y \subseteq V$, $Y \neq \emptyset$ существует $n \geq 0$ такое, что $f^n(U) \cap Y \neq \emptyset$.

Известны многочисленные попытки популяционной интерпретации перехода к хаосу, и существует довольно сомнительное мнение, что модели с переходом к хаосу обладают преимуществами для моделирования. Однако возможность применения сценариев хаотизации через каскады бифуркаций к проблемам динамики популяций значительно переоценивается. Существует немало функциональных итераций, не имеющих отношения к моделированию природных процессов, для которых возможно возникновение хаотических аттракторов, называемых «странными». Хаотизация по [5] — исключительно математическое свойство. Рассуждать о роли повышении репродуктивного потенциала в нестабильности экосистем на основе «фрак-

тальной структуры» преждевременно. Действительно, еще никто не писал о размазанной по числовой прямой биомассе. Трудно соотнести совершенное канторовское множество, образующееся в момент накопления каскада бифуркаций, и конечное множество особей, которое представляет собой биологическая популяция. Применяя дифференциальные уравнения в задачах популяционной динамики, мы должны понимать, что где-то заканчиваются понятия о бесконечно малых величинах и начинаются привычные единицы измерения.

3. Уравнения связи выживаемости с темпами роста

Самая простая модель численности поколения $N(t)$ исходит из дифференциального уравнения пропорциональной смертности и задает экспоненциальную кривую убыли с одним параметром:

$$\frac{dN}{dt} = -zN, \quad N(t) = N_0 e^{-zt}.$$

По имеющимся сведениям [6] с экспоненциальной убылью исходной генерации приблизительно согласуются данные о массовых видах мелких короткоцикловых рыб озер и водохранилищ. Для разных видов рыб темп убыли должен варьироваться по мере развития особей, наиболее резко выражаться у молоди короткоцикловых пелагических рыб, подверженных биотическому прессу на всем жизненном цикле. Для подобных видов рыб (снеток, укля, тюлька) видится не актуальным разработка моделей на основе принципов саморегулирующих факторов. Для крупных осетровых и лососевых модели формирования поколений служат средством оценки перспектив восстановления численности после перелома.

Основываясь на данных наблюдений за «покатной» миграцией молоди волжских осетровых рыб в годы с различным объемом стока воды [7] в половодье, отметив сдвиги пика прохождения мигрирующей к морю молоди, мы предложили модель [8] с двумя мгновенными коэффициентами смертности в уравнении убыли:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -(\alpha w(t)N(t) + \theta(S)\beta)N(t), \\ \frac{dw}{dt} = \frac{g}{N+\zeta}, \quad \theta(S) = \frac{1}{1-\exp(-cS)}, \\ \frac{dg}{dt} = rg - \frac{rg^2}{G} - \nu N(t), \end{cases} \quad (3)$$

где S — величина нерестового запаса; $w(t)$ отражает уровень размерного развития поколения, влияющий на увеличение пищевых

потребностей; в третьем уравнении g описывает динамику количества доступных кормовых объектов согласно известному уравнению Ферхюльста — Пирла с учетом потребления корма молодью $\nu N(t)$; убывающая функция $\theta(S) \rightarrow 1$ при $S \rightarrow \infty$ слабо влияет на вычисление итогового пополнения $N(T)$, если численность запаса достаточно велика. Функционал предназначен для моделирования резкого снижения эффективности воспроизводства при деградации популяции, важного для благополучия осетровых; ζ — параметр, учитывающий ограничение темпов развития, не зависящих от численности; c — параметр, характеризующий степень выраженности эффекта Олли; α — мгновенный коэффициент компенсационной смертности; β — мгновенный коэффициент декомпенсационной смертности; $t \in [0, T]$ — специфичный для биологического вида интервал уязвимости.

График зависимости, полученный при численном решении задачи Коши для всех $S \in \mathbb{Z}^+$ с начальными условиями $w(0) = w_0$, $g(0) = 0.5G$, $N(0) = \lambda S$, где λ — средняя плодовитость особей, представляет унимодальную кривую с уменьшающимся наклоном ниспадающей правой ветви (при параметрах $\alpha = 0.8 \times 10^{-14}$, по средней плодовитости волжской севрюги за время наблюдений $\lambda = 227 \times 10^3$, $c = 2.5 \times 10^{-3}$, $G = 125000$, $T = 55$ сут.).

Кривая имеет ненулевую горизонтальную асимптоту, две точки перегиба и две нетривиальные точки пересечения с биссектрисой координатного угла. Форма согласуется с данными наблюдений о лабораторных популяциях гуппи.

4. Модификация представления модельного времени

Проблема возникла, так как указанная зависимость не согласовывалась с данными о воспроизводстве волжской популяции севрюги, для которой наблюдалось наличие двух локальных экстремумов. Обоснование данного явления определило цель для построения модифицированной модели воспроизводства популяций рыб.

Изучение биологических особенностей осетровых привело к выводам о существенном влиянии быстрых изменений в их онтогенезе, имеющем экспериментальное подтверждение в работах по исследованию смены этапов развития организмов. В современных условиях развития вычислительной математики для решения задачи создания модели, учитывающей метаморфозы в жизненном цикле, целесооб-

разно воспользоваться представлением модельного времени:

$$\tau = \bigcup_n \{ \text{Gap_pre}_n, [T_{n-1}, T_n], \text{Gap_post}_n \},$$

где Gap_pre — «временная щель» для вычисления согласованных начальных условий и проверки предиката на левом конце промежутка очередного длительного поведения; Gap_post — аналогичная «щель», где определяются новые начальные условия на правом конце текущего промежутка τ_i для решения следующей по порядку (или выбранной по условиям предиката) задачи Коши; T_i — время срабатывания перехода: когда проверка предиката события возвращает *true*, что приводит алгоритм к смене поведения. Таким образом, модельное гибридное (не полностью тождественный термин непрерывно-дискретное) время определяется пронумерованной и упорядоченной последовательностью кадров, в которых непрерывная составляющая времени сменяется дискретными отсчетами.

При достижении особых состояний в пространстве переменных состояния (событий) могут изменяться значения параметров в правых частях, форма правой части или число уравнений. События описываются предикатами, определенными на решениях дифференциальных уравнений и позволяющими вычислительной среде выделять из всего множества состояний системы то, которое приводит к изменению поведения. Конечное множество интервалов между событиями будет соответствовать модельным стадиям развития. Для исследования гибридных систем разработаны специальные алгоритмы [9]. Гибридный автомат — удобная форма представления непрерывно-дискретных структур — расширение дискретных карт состояний с условными переходами, где узлам графической формы сопоставлены процессы, описываемые дифференциальными уравнениями.

5. Уравнения переопределяемых темпов роста

В случае важной роли метаморфозов у молоди анадромных рыб на первый взгляд логично организовать прямое переопределение коэффициентов мгновенной смертности в первом уравнении (3) по мере наступления фиксированных отрезков времени T_k . Мы опробовали данный метод в [10], где столкнулись с трудоемкой работой по параметрической идентификации, но получили ряд связанных с хаотизацией сложных динамических режимов. Предлагаем модифициро-

ванный подход, который видится более математически элегантным. Идея заключается в описании резких изменений скорости роста при смене этапов, что опосредованно влияет на выживаемость. Именно скорость роста особей определяет момент выхода поколения из-под действия превалирующих на данном этапе онтогенеза факторов смертности, связанных с хищничеством в отношении икринок, личинок и молоди.

По литературным данным известно [11], что рост молоди в начальный период жизни после выклева также происходит неравномерно, когда повышенная скорость чередуется с замедленной. После вылупления из икринки скорость роста интенсивна, резорбция желточного мешка приводит к временной депрессии роста в условиях конкуренции за пищевые ресурсы. После приспособления к активному питанию и формирования плавников происходит вновь увеличение прироста массы при активном поиске кормовых организмов.

Второе уравнение для скорости размерного развития $w(t)$ из системы (3) заменим гибридной структурой с дважды предикативно переопределяемой правой частью:

$$\frac{dw}{dt} = \begin{cases} q, & 0 < t < \tau, \\ \frac{g}{\sqrt{N + \zeta}}, & t > \tau, w(t) < w_{k1}, \\ \eta \sqrt[3]{w(t)^2} - \vartheta w(t)^\sigma, & w_{k1} < w(t) < w_k, \end{cases} \quad (4)$$

где $[0, \tau)$ — длительность периода развития до резорбции желточного мешка, определяемая биологическими особенностями вида (для осетровых в среднем 8–12 суток) при линейном коэффициенте q ; w_k интерпретируется как уровень развития, при достижении которого изменяется характер метаболизма из-за смены характера питания. Обычно это изменение связано с увеличением подвижности особей, что непосредственно влияет на уменьшение уязвимости, и далее у осетровых происходит полный выход из-под пресса доминирующего хищника. Продолжительность интервала уязвимости в общем виде ухудшения условий может не быть фиксированной. При переходе к третьей модельной стадии развития полагается, что скорость роста свободно мигрирующей молоди не определяется более плотностью и может описываться известным уравнением Л. фон Берталанфи, где коэффициенты анаболизма η и катаболизма ϑ были уже определены для многих видов животных. Для рыб обычно принимают $\sigma = 1$, но при долгих анадромных миграциях можно принять $\sigma < 1$ в вычислительной модели. На первых стадиях жизненного цикла помимо роста

происходит формирование систем жизнедеятельности организма, тогда как на последующих — рост (про рыб говорят «нагул») и половое созревание. Вполне оправдано разделять применяемые уравнения для условного размерного развития молоди на ранних стадиях онтогенеза и роста уже сформировавшихся особей.

Заключение

Нами развиваются методы вычислительного моделирования скачкообразных изменений, наблюдаемых в биологических процессах. Модели исходят из представления о прерывистости индивидуального развития организмов. Выбран аппарат дифференциальных уравнений с динамически переопределяемой правой частью, что алгоритмически реализуется на основе гибридных автоматов. Подобного вида модели рассчитаны на применение в сценарных вычислительных экспериментах, описывающих возможные варианты развития экологической ситуации при различном уровне антропогенного воздействия. Методика интересна для анализа распространения и выживаемости личинок жуков-листоедов [12], вредителей или специально вселенного вида для борьбы с сорняками. В сценарном подходе происходящие по условиям логики эксперимента события управления меняют ход заданного системой дифференциальных уравнений процесса. В зависимости от конкретной задачи исследования, мы можем анализировать в сценариях непрерывную траекторию на отрезке времени, что актуально при оценке выживаемости молоди рыб в прудах. Либо рассматривать итерационную систему $x_{n+1} = \psi(x_n)$, где численное решение задачи Коши выполняет роль оператора эволюции для наборов начальных точек сравниваемых дискретных траекторий $\psi^n(x_{0i})$

Литература

1. Ricker W. Stock and recruitment // J. Fisheries Research Board of Canada. — 1954. — Vol. 11, № 5. — P. 559–623.
2. Hartman P. A lemma in the theory of structural stability of differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. — 1960. — Vol. 11, № 4. — P. 610–620.
3. Feigenbaum M. J. Universal behavior in nonlinear systems // J. Phys. D. — 1983. — Vol. 7, № 1–3. — P. 16–39.
4. Singer D. Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval // SIAM J. Appl. Math. — 1978. — Vol. 35. — P. 260–268.
5. Vellekoop M., Berglund R. On intervals, transitivity = chaos // Amer. Math. Monthly. — 1994. — Vol. 101, № 4. — P. 353–355.

6. Мосияш С. С., Шашуловский В. А., Черепанов К. М. Стратегия реализации репродуктивного потенциала популяций массовых видов рыб Волгоградского водохранилища в первые месяцы жизни их поколений // Поволжский экологический журн. — 2003. — № 1. — С. 20–30
7. Вещев П. В., Гутенева Г. И. Эффективность естественного воспроизводства осетровых в низовьях Волги в современных условиях // Экология. — 2012. — № 2. — С. 123–128.
8. Переварюха А. Ю. Разработка вычислительных моделей воспроизводства рыб для сценарного исследования // Таврический вестн. информатики и математики. — 2014. — № 1. — С. 93–103.
9. Сениченков Ю. Б. Численное моделирование гибридных систем. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2004. — 206 с.
10. Perevaryukha A. Y. Hybrid model of bioresources' dynamics: equilibrium, cycle, and transitional chaos // Automatic Control and Computer Sciences. — 2011. — № 4. — P. 223–232.
11. Анисимова И. М., Лавровский В. В. Ихтиология. — М.: Высш. шк., 1983. — 255 с.
12. Мосейко А. Г. Уточнение сельскохозяйственного значения видов жуков-листоедов (Coleoptera, Chrysomelidae), повреждающих сою на Дальнем Востоке // Вестн. защиты растений. — 2010. — № 1. — С. 42–47.

ПЕРЕВАРЮХА АНДРЕЙ ЮРЬЕВИЧ
Санкт-Петербургский институт информатики
и автоматизации РАН
РОССИЯ, 199178, Санкт-Петербург, 14-я линия, 39
E-mail: madelf@pisem.net

DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR THE NUMBER OF GENERATIONS WITH VARIABLE GROWTH RATE OF CASPIAN STURGEON INDIVIDUALS

Perevaryukha A. Yu.

The paper presents a method of modeling features of the reproductive cycle of populations in response to changing ecological and physiological factors that determine the efficiency of reproduction. The system of three differential equations to describe the relationship between the decrease generation and the weight increment of young fish is complemented by considering fluctuations in the growth rate of juveniles. The continuous-discrete model for computational studies was on the basis of the biological studies that the rate of development varies sharply at the transition to the next stage of development. The rate will remain in inverse proportion to the density of individuals on a limited period of early ontogenesis. The equations are intended to scenario modeling in analyzing the efficiency of the artificial introduction grown under various conditions of individuals in a natural environment.

Key words: recovery model of sturgeon population, equation of growth rate, introduction efficiency, computing scenarios.

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ
ТИПА КОШИ С ВЕСОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Л. Ю. Плиева

В данной работе строятся квадратурные формулы интерполяционного типа для интегралов типа Коши с весовыми функциями. В качестве узлов интерполирования берется совокупность нулей двух ортогональных многочленов по данному весу. Дается оценка погрешности.

Ключевые слова: квадратурная формула, интеграл типа Коши, интерполяционный многочлен, узлы, многочлен Чебышева, погрешность.

1. Постановка задачи

Рассмотрим интеграл типа Коши вида [1–3]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 p(t) \frac{\varphi(t)}{t-z} dt, \quad (1)$$

где $p(t) = (1-t^2)^{\pm\frac{1}{2}}$, плотность $\varphi(t)$ — достаточно гладкая функция. Интегралы такого типа, как известно, имеют широкое приложение в задачах математической физики, теории упругости.

В данной работе строятся квадратурные формулы на основе замены плотности $\varphi(t)$ интерполяционным многочленом, где в качестве узлов интерполирования берется совокупность нулей двух ортогональных по данному весу $p(t)$ полиномов последовательных степеней n и $n+1$, что существенно отличает их от ранее построенных квадратурных формул.

2. Построение квадратурных формул

Итак, рассмотрим интеграл вида

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt. \quad (2)$$

Пусть $\{x_k\}$ и $\{\bar{x}_k\}$ — нули многочленов Чебышева первого рода $T_n(t)$, $T_{n+1}(t)$ соответственно.

В дальнейшем нам понадобятся выражения вида

$$\begin{aligned} [T_n(t)T_{n+1}(t)]'_{t=x_k} &= T'_n(x_k)T_{n+1}(x_k), \\ [T_n(t)T_{n+1}(t)]'_{t=\bar{x}_k} &= T_n(\bar{x}_k)T'_{n+1}(\bar{x}_k). \end{aligned} \quad (3)$$

Используя представление многочлена Чебышева

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \cos(n \arccos(t)), \\ x_k &= \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad \bar{x}_k = \cos \frac{2k-1}{2(n+1)} \pi, \end{aligned}$$

для выражений (3) получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} [T_n(t)T_{n+1}(t)]'_{t=x_k} &= -n, \\ [T_n(t)T_{n+1}(t)]'_{t=\bar{x}_k} &= n+1. \end{aligned} \quad (4)$$

Интерполяционный многочлен $L_{2n}(\varphi, t)$ плотности $\varphi(t)$ будет иметь вид

$$L_{2n}(\varphi, t) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{T_n(t)T_{n+1}(t)}{(t - \tilde{x}_k)[T_n(t)T_{n+1}(t)]'_{t=\tilde{x}_k}},$$

где $\{\tilde{x}_k\}$ — совокупность узлов $\{x_k\}$ и $\{\bar{x}_k\}$, являющихся, как указывалось выше, нулями полиномов $T_n(t)$, $T_{n+1}(t)$.

Используя выражения (4) для интерполяционного многочлена $L_{2n}(\varphi, t)$, получим следующее представление:

$$L_{2n}(\varphi, t) = T_n(t)T_{n+1}(t) \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\varphi(\bar{x}_k)}{(t - \bar{x}_k)} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(x_k)}{(t - x_k)} \right\}. \quad (5)$$

Подставим в интеграл (2) вместо плотности $\varphi(t)$ ее интерполяционный многочлен (5), получим приближенную формулу

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt \approx \\ & \approx \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \varphi(\bar{x}_k) \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t)T_{n+1}(t)}{(t-z)(t-\bar{x}_k)} dt - \\ & - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(x_k) \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t)T_{n+1}(t)}{(t-z)(t-x_k)} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим интеграл, входящий в квадратурную формулу (6):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t)T_{n+1}(t)}{(t-z)(t-\bar{x}_k)} dt. \quad (7)$$

Он разобьется на интегралы вида

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\bar{x}_k - z} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t)T_{n+1}(t)}{t-\bar{x}_k} dt - \\ & - \frac{1}{\bar{x}_k - z} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t)T_{n+1}(t)}{t-z} dt. \end{aligned}$$

Учитывая равенства

$$\begin{aligned} T_n(t)T_{n+1}(t) &= \frac{T_1(t) + T_{2n+1}(t)}{2}, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t)}{t-x} dt &= U_{n-1}(x), \\ \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t)}{t-z} dt &= i \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}}, \end{aligned}$$

где $\sqrt{z^2 - 1}$ — однозначная в плоскости с разрезом $[-1, 1]$ и принимающая на отрезке $(1, \infty)$ действительные значения ветвь этой функции, $z \notin [-1, 1]$, получим для интеграла (7) равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t)T_{n+1}(t)}{(t-z)(t-\bar{x}_k)} dt = \\ & = \frac{1}{4i(\bar{x}_k - z)} \left(1 + U_{2n}(\bar{x}_k) + \frac{z - \sqrt{z^2 - 1} + (z - \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}}{\sqrt{z^2 - 1}} \right). \end{aligned}$$

Аналогично для интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t)T_{n+1}(t)}{(t-z)(t-x_k)} dt \quad (8)$$

с учетом того, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_n(t)T_{n+1}(t) dt = 0,$$

в силу ортогональности системы полиномов $\{T_n(t)\}$ на отрезке $[-1, 1]$ по весу $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_n(t)T_{n+1}(t)}{(t-z)(t-x_k)} dt = \\ & = \frac{1}{4i(x_k - z)} \frac{z - \sqrt{z^2 - 1} + (z - \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}}{\sqrt{z^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, для интеграла (2) мы получим следующую квадратурную формулу:

$$\begin{aligned} \Phi_{1n}(z) = & \frac{1}{4i(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\varphi(\bar{x}_k)}{(\bar{x}_k - z)} (2T_n(\bar{x}_k) + A(z)) - \\ & - \frac{A(z)}{4in} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(x_k)}{(x_k - z)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$A(z) = \frac{z - \sqrt{z^2 - 1} + (z - \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}}{\sqrt{z^2 - 1}}.$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi(t)}{t-z} dt. \quad (10)$$

Учитывая, что

$$[U_n(t)U_{n+1}(t)]'_{t=t_{k,n}} = -\frac{n+1}{\sin^2 \frac{\pi k}{n+1}}, \quad [U_n(t)U_{n+1}(t)]'_{t=t_{k,n+1}} = \frac{n+2}{\sin^2 \frac{\pi k}{n+2}},$$

где $U_n(t) = \frac{\sin((n+1)\arccos(t))}{\sqrt{1-t^2}}$ — многочлен Чебышева второго рода, $t_{k,n+1} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+2}\right)$, $t_{k,n} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ — нули многочленов $U_{n+1}(t)$, $U_n(t)$ соответственно, для плотности $\varphi(t)$ мы получим следующий интерполяционный многочлен:

$$L_{2n}(\varphi, t) = U_n(t)U_{n+1}(t) \times \\ \times \left\{ -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_{k,n})}{(t-t_{k,n})} \sin^2 \frac{\pi k}{n+1} + \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\varphi(t_{k,n+1})}{(t-t_{k,n+1})} \sin^2 \frac{\pi k}{n+2} \right\}. \quad (11)$$

Если подставить в интеграл (10) вместо плотности $\varphi(t)$ ее интерполяционный многочлен, то после некоторых преобразований мы придем к следующей квадратурной формуле для приближенного вычисления интеграла (10):

$$\Phi_{2n}(z) = \frac{1}{4i(n+2)} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\varphi(t_{k,n+1})}{(t_{k,n+1} - z)} \times \\ \times \sin^2 \frac{\pi k}{n+2} (1 - U_{2n+2}(t_{k,n+1}) + A_1(z)) - \\ - \frac{1}{4i(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_{k,n})}{(t_{k,n} - z)} \sin^2 \frac{\pi k}{n+1} (1 - U_{2n+2}(t_{k,n}) + A_1(z)), \quad (12)$$

где

$$A_1(z) = \frac{z - \sqrt{z^2 - 1} - (z - \sqrt{z^2 - 1})^{2n+2}}{\sqrt{z^2 - 1}}.$$

Для полученных квадратурных формул интерполяционного типа (9) и (12) справедливы следующие оценки погрешности:

$$|\Phi_1(z) - \Phi_{1n}(z)| \leq M \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{|t-z|} dt,$$

$$|\Phi_2(z) - \Phi_{2n}(z)| \leq M \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{1}{|t-z|} dt,$$

где $M = \max_{t \in [-1,1]} \frac{|\varphi^{(2n+1)}(\xi(t))|}{(2n+1)!}$.

Литература

1. Ахиезер Н. И. О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов // Изв. АН СССР. — 1945. — Т. 9, № 4. — С. 275–290.
2. Плиева Л. Ю. Об интерполяционных квадратурных формулах для интегралов типа Коши с весами Якоби // Мат. форум. Т. 8, ч. 2. Исслед. по диф. уравнениям, мат. моделированию и проблемам мат. образования. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014 — С. 124–129. — (Итоги науки. Юг России.)
3. Пыхтеев Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши. — Новосибирск: Наука, 1980. — 120 с.
4. Лифанов И. К. Численное решение одномерных сингулярных интегральных уравнений. — М.: ТОО «Янус», 1995. — 520 с.
5. Хубежты Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. — 236 с.

Плиева Любовь Юрьевна
Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
E-mail: plieva-21@mail.ru

QUADRATURE FORMULAS FOR CAUCHY TYPE INTEGRALS WITH WEIGHT FUNCTIONS

Plieva L. Yu.

In this paper we construct quadrature formulas of interpolation type for the Cauchy type integrals with weight functions. As the nodes of interpolation we take a set of zeros of two orthogonal polynomials with respect to the weight. The error estimation is also given.

Key words: error estimation, quadrature formula, Cauchy type integral, weight function, interpolating polynomial, zeros of a polynomial.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I РОДА

Ш. С. Хубежты

В работе представлен обзор работ по численным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений I рода, выполненных в отделе математического моделирования Южного математического института — филиала ВНИИ РАН в течение последнего года.

Ключевые слова: сингулярные и гиперсингулярные интегралы, квадратные формулы, вычислительные схемы, оценки погрешностей.

1. Введение

Теория сингулярных интегральных уравнений из-за многочисленных приложений переживает бурное развитие. Этим уравнениям посвящены фундаментальные труды широко известных математиков: Д. Гильберта, А. Пуанкаре, В. Карлемана, Н. И. Мусхелишвили, С. Г. Михлина, З. Пресдорфа и др. Хорошо известен спектр применения теории сингулярных уравнений в механике и технике: теории упругости, термоупругости, аэродинамике. Сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения являются одним из основных аппаратов математического моделирования задач электродинамики.

Однако решение сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений возможно лишь в исключительных случаях, и основным аппаратом в прикладных задачах являются численные методы. В этом направлении нужно отметить первую работу М. А. Лаврентьева 1932 г. [1], про которую Н. И. Мусхелишвили в каждом издании своей замечательной книги «Сингулярные интегральные уравнения» [2] пишет: «Дальнейшая разработка этого и аналогичных методов приближенного решения сингулярных интегральных уравнений является, как мне кажется, одной из важнейших очередных задач этих уравнений». После этого появились многочисленные труды по численному решению этих уравнений. В этом направлении особенно должен отметить труды В. В. Иванова [3], И. К. Лифанова [4], Б. Г. Габдулхаева [5], Д. Г. Саникидзе [6], И. В. Бойкова [7]. Но надо

заметить, что и теория, и методы численного решения гиперсингулярных интегральных уравнений разработаны в значительно меньшей степени, нежели сингулярные интегральные уравнения. Среди работ, посвященных приближенным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений, можно отметить работы Б. Г. Габдулхаева [5] и И. В. Бойкова [7, 8].

Гиперсингулярное интегральное уравнение I рода имеет следующий вид [2, 5, 7]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^p} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(x, t) \varphi_0(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где $-1 < x < 1$, $k(x, t)$ и $f(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_0(t)$ — неизвестная функция.

Гиперсингулярный интеграл

$$H(\varphi_0, x) = \int_{-1}^1 \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^p} dt, \quad p \geq 2, \quad (2)$$

понимается в смысле конечной части по Адамару [5]:

$$H(\varphi_0, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left\{ \int_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^p} dt + \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^p} dt - \frac{\psi(x)}{\varepsilon^{p-1}} \right\}, \quad (3)$$

где

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{p-2} \frac{\varphi_0^{(k)}(x)}{k!} \frac{\varepsilon^k [1 + (-1)^{p-k}]}{p-k-1}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать гиперсингулярные интегральные уравнения I рода в случае $p = 2$, т. е. уравнения вида

$$K\varphi_0 \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(x, t) \varphi_0(t) dt = f(x), \quad -1 < x < 1, \quad (4)$$

где

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^2} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^2} dt + \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^2} dt - \frac{2\varphi_0(x)}{\varepsilon} \right). \quad (5)$$

В задачах механики и электродинамики чаще всего встречаются случаи, когда $\varphi_0(t)$ приводится в виде

$$\begin{aligned}\varphi_0(t) &= \sqrt{1-t^2} \varphi(t), & \varphi_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \varphi(t), \\ \varphi_0(t) &= \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \varphi(t), & \varphi_0(t) &= \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \varphi(t),\end{aligned}$$

где $\varphi(t)$ — достаточно гладкая функция на отрезке $[-1, 1]$.

2. Квадратурные формулы для гиперсингулярных интегралов

Очевидно, что для численного решения уравнения (4) методом квадратур особое значение имеет аппроксимация гиперсингулярного и регулярного интегралов, т. е. квадратурные формулы. Таким образом, для численного решения надо построить квадратурные формулы для следующих сингулярных интегралов:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt, & \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt, & \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt.\end{aligned}\tag{6}$$

В [9, 10] построены следующие квадратурные формулы:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt &\approx \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (1-x_k^2)}{(x-x_k)^2} \times \\ &\times [-T_{n+1}(x_k) + T_{n+1}(x) - (n+1)(x-x_k)U_n(x)] \varphi(x_k), \\ x_k &= \cos \frac{k\pi}{n+1},\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt &\approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \sqrt{1-x_k^2}}{(x-x_k)^2} \times \\ &\times \left[U_{n-1}(x_k) - U_{n-1}(x) + (x-x_k) \frac{xU_{n-1}(x) - nT_n(x)}{1-x^2} \right] \varphi(x_k), \quad (8) \\ x_k &= \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt &\approx \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \sqrt{\frac{1-x_k}{2}} (1+x_k)}{(x-x_k)^2} \times \\ &\times \left[S_n(x_k) - S_n(x) - (x-x_k) \frac{(2n+1)C_n(x) - S_n(x)}{2(1-x)} \right] \varphi(x_k), \quad (9) \\ x_k &= \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt &\approx \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (1-x_k) \sqrt{\frac{1+x_k}{2}}}{(x-x_k)^2} \times \\ &\times \left[-C_n(x_k) + C_n(x) - (x-x_k) \frac{(2n+1)S_n(x) - C_n(x)}{2(1+x)} \right] \varphi(x_k), \quad (10) \\ x_k &= \cos \frac{2k\pi}{2n+1}, \end{aligned}$$

где $T_n(x)$, $U_n(x)$, $C_n(x)$, $S_n(x)$ — ортогональные многочлены соответственно с весами

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad p(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad p(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad p(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

на отрезке $[-1, 1]$ следующих видов:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos n \arccos x, \quad U_n(x) = \frac{\sin(n+1) \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}, \\ C_n(x) &= \frac{\cos \frac{2n+1}{2} \arccos x}{\cos \frac{1}{2} \arccos x}, \quad S_n(x) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \arccos x}{\sin \frac{1}{2} \arccos x}. \end{aligned}$$

Формулы (7)–(10) точны для многочленов степени не выше $n-1$.

Кроме этого, для регулярных интегралов мы будем пользоваться следующими квадратурными формулами [11, 14]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} f(t) dt \approx \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n (1-x_k^2) f(x_k), \quad (11)$$

где $x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, \dots, n$, — нули многочлена $U_n(x)$;

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t) dt \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k), \quad (12)$$

где $x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, \dots, n$, — нули многочлена $T_n(x)$;

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} f(t) dt \approx \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n (1+x_k) f(x_k), \quad (13)$$

где $x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n+1}$, $k = 1, \dots, n$, — нули многочлена $C_n(x)$;

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} f(t) dt \approx \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n (1-x_k) f(x_k), \quad (14)$$

где $x_k = \cos \frac{2k\pi}{2n+1}$, $k = 1, \dots, n$, — нули многочлена $S_n(x)$.

Указанные квадратурные формулы (11)–(14) имеют наивысшую алгебраическую точность $2n-1$, т. е. они точны для всех многочленов степени $\leq 2n-1$.

3. Вычислительные схемы

Сперва рассмотрим гиперсингулярное интегральное уравнение (4) в случае, когда ищем решения вида $\varphi_0(t) = \sqrt{1-t^2} \varphi(t)$, т. е. решаем уравнение

$$K_1 \varphi \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} k(x,t) \varphi(t) dt = f(x). \quad (15)$$

Используя квадратурную формулу (7) для гиперсингулярного интеграла и квадратурную формулу (11) для регулярного интеграла, получаем следующее дискретное уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}(1-x_k^2)}{(x-x_k)^2} \times \\ & \times [-T_{n+1}(x_k) + T_{n+1}(x) - (n+1)(x-x_k)U_n(x)]\varphi(x_k) + \\ & + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n (1-x_k^2)k(x, x_k)\varphi(x_k) = f(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Придавая x значения $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, т. е. $x = x_j$, $j = 1, \dots, n$, и раскрывая неопределенность в выражении, когда x_j и x_k совпадают (это случится когда $k = j$), получается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^n \frac{(-1)^{k-1}(1-x_k^2)}{(x_j-x_k)^2} \times \\ & \times [-T_{n+1}(x_k) + T_{n+1}(x_j) - (n+1)(x_j-x_k)U_n(x_j)]\varphi(x_k) - \\ & - \frac{n+1}{2}\varphi(x_j) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n (1-x_k^2)k(x_j, x_k)\varphi(x_k) = f(x_j), \\ & x_j = \cos \frac{j\pi}{n+1}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (17)$$

Решая эту систему уравнений, получим численные значения неизвестной функции $\varphi(t)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n .

Теперь рассмотрим уравнение (4), когда ищется решение вида $\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\varphi(t)$. Тогда уравнение (4) примет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} k(x, t)\varphi(t) dt = f(x). \quad (18)$$

Используя квадратурную формулу (8) для гиперсингулярного интеграла и квадратурную формулу (12) для регулярного интеграла,

получаем дискретное уравнение вида

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \sqrt{1-x_k^2}}{(x-x_k)^2} \times \\ & \times \left[U_{n-1}(x_k) - U_{n-1}(x) + (x-x_k) \frac{xU_{n-1}(x) - nT_n(x)}{1-x^2} \right] \varphi(x_k) + \\ & + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k(x_j, x_k) \varphi(x_k) = f(x), \\ & x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (19)$$

Аналогично, придавая параметру x значения $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и раскрывая неопределенность при $x_j = x_k$ ($k = j$) [12, 13], получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^n \frac{(-1)^{k-1} \sqrt{1-x_k^2}}{(x_j-x_k)^2} \left[U_{n-1}(x_k) - U_{n-1}(x_j) + \right. \\ & \left. + (x_j-x_k) \frac{x_j U_{n-1}(x_j) - nT_n(x_j)}{1-x_j^2} \right] \varphi(x_k) + \\ & + \frac{-(n^2-1)(1-x_j^2) + 3x_j^2}{2n(1-x_j^2)^2} \varphi(x_j) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k(x_j, x_k) \varphi(x_k) = f(x_j), \\ & j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (20)$$

После решения этой системы будем иметь значения неизвестной функции $\varphi(t)$ в точках x_1, x_2, \dots, x_n .

Пусть теперь ищется решение (4) в виде $\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \varphi(t)$, т. е. решается уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} k(x, t) \varphi(t) dt = f(x). \quad (21)$$

Используя квадратурную формулу (9) для гиперсингулярного интеграла и квадратурную формулу (13) для регулярного интеграла,

получаем следующее дискретное уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}(1+x_k)\sqrt{\frac{1-x_k}{2}}}{(x-x_k)^2} \times \\ & \times \left[S_n(x_k) - S_n(x) - (x-x_k) \frac{(2n+1)C_n(x) - S_n(x)}{2(1-x)} \right] \varphi(x_k) + \\ & + \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n (1+x_k)k(x, x_k)\varphi(x_k) = f(x), \\ & x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+1} \pi, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (22)$$

Также, придавая параметру x значения $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и раскрывая предел при $x_j = x_k$ ($k = j$) [12, 13], получаем алгебраическую систему уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{2}{2n+1} \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^n \frac{(-1)^{k-1}(1+x_k)\sqrt{\frac{1-x_k}{2}}}{(x_j-x_k)^2} \times \\ & \times \left[S_n(x_k) - S_n(x_j) - (x_j-x_k) \frac{(2n+1)C_n(x_j) - S_n(x_j)}{2(1-x_j)} \right] \varphi(x_k) + \\ & + \frac{1}{4(2n+1)} \frac{-(2n+1)(1-x_j) + 3(1-x_j)}{(1-x_j)^2} \varphi(x_j) + \\ & + \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n (1+x_k)k(x_j, x_k)\varphi(x_k) = f(x_j), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (23)$$

При $\varphi_0 = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \varphi(t)$ аналогичными рассуждениями получается следующее дискретное уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}(1-x_k)\sqrt{\frac{1+x_k}{2}}}{(x-x_k)^2} \times \\ & \times \left[-C_n(x_k) + C_n(x) - (x-x_k) \frac{(2n+1)S_n(x) - C_n(x)}{2(1+x)} \right] \varphi(x_k) + \\ & + \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n (1-x_k)k(x, x_k)\varphi(x_k) = f(x), \\ & x_k = \cos \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (24)$$

Далее, применяя метод коллокации, получается система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$ [12, 13]:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{2n+1} \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^n \frac{(-1)^{k-1} (1-x_k) \sqrt{\frac{1+x_k}{2}}}{(x_j-x_k)^2} \times \\ & \times \left[-C_n(x_k) + C_n(x_j) - (x_j-x_k) \frac{(2n+1)S_n(x_j) - C_n(x_j)}{2(1+x_j)} \right] \varphi(x_k) + \\ & + \frac{1}{4(2n+1)} \frac{-(2n+1)^2(1+x_j) + 3(1-x_j)}{(1+x_j)^2} \varphi(x_j) + \\ & + \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n (1-x_k) k(x_j, x_k) \varphi(x_k) = f(x_j), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (25)$$

4. Обоснование вычислительной схемы (17)

Рассмотрим приближенное решение гиперсингулярного интегрального уравнения (4) в предположении, что имеется решение, обращающееся в нуль на концах интервала интегрирования, т. е. вида $\varphi_0(t) = \sqrt{1-t^2} \varphi(t)$.

Обозначим через X пространство функций вида $\varphi_0(t) = \sqrt{1-t^2} \varphi(t)$, где функции $\varphi(t)$ имеют непрерывные производные на $[-1, 1]$ до порядка $r-1$, а производные порядка r удовлетворяют условию Гёльдера H_α с показателем α , $0 < \alpha \leq 1$. Норма в пространстве X определяется формулой (см. [8])

$$\begin{aligned} \|\varphi_0(t)\| &= \|\varphi(t)\|_{C[-1,1]} + \|\varphi'(t)\|_{C[-1,1]} + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|\varphi'(t_1) - \varphi'(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}, \\ 0 &< \beta < \alpha. \end{aligned}$$

Через Y обозначим пространство функций вида $y(t) = \sqrt{1-t^2} \psi(t)$ с нормой

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &= \|\psi(t)\|_{C[-1,1]} + \|\psi'(t)\|_{C[-1,1]} + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|\psi'(t_1) - \psi'(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}, \\ 0 &< \beta < \alpha. \end{aligned}$$

Через X_n обозначим пространство функций вида

$$\varphi_{0n}(t) = \sqrt{1-t^2} \varphi_n(t), \quad \varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k,$$

с нормой

$$\|\varphi_{0n}(t)\| = \|\varphi_n(t)\|_{C[-1,1]} + \|\varphi'_n(t)\|_{C[-1,1]} + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|\varphi'_n(t_1) - \varphi'_n(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta},$$

$$0 < \beta < \alpha.$$

Через Y_n обозначим пространство функций вида

$$y_n(t) = \sqrt{1-t^2} \psi_n(t), \quad \psi_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k,$$

с нормой

$$\|y_n(t)\| = \|\psi_n(t)\|_{C[-1,1]} + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|\psi_n(t_1) - \psi_n(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}, \quad 0 < \beta < \alpha.$$

Будем считать, что оператор K действует из пространства X в Y и имеет обратный оператор K^{-1} , действующий из Y в X .

Обозначим через L_n оператор, проектирующий пространство Y на пространство Y_n по формуле

$$L_n[y(t)] = \sqrt{1-t^2} L_n[\psi(t)],$$

где $\psi(t) \in C[-1,1]$, $L_n[\psi(t)]$ — оператор, проектирующий непрерывные функции на множество интерполяционных полиномов степени $n-1$ по узлам полиномов Чебышева второго рода. Известно [16], что $\|L_n\| \leq C \ln n$.

Приближенное решение (4) будем искать в виде функции

$$\varphi_{0n}(t) = \sqrt{1-t^2} \varphi_n(t) = \sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \widehat{U}_k(t),$$

где $\widehat{U}_k(t)$ — ортонормированные с весом $\sqrt{1-t^2}$ полиномы Чебышева второго рода. Это то же самое, что

$$\varphi_{0n}(t) = \sqrt{1-t^2} \sum_{k=1}^n \frac{U_n(t)}{(t-x_k)U'_n(x_k)} \varphi_n(x_k).$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений, представленных в операторной форме уравнением

$$L_n \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi_n(t)}{(t-x)^2} dt + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} L_n^t[k(x,t)\varphi_n(t)] dt \right) \right] = L_n \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) \right]. \quad (26)$$

Воспользовавшись квадратурными формулами, равенство (26) можно представить в виде

$$K_n \varphi_{0n} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi_n(t)}{(t-x)^2} dt + \\ + L_n^x \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} L_n^t[k(x,t)\varphi_n(t)] dt \right] = \\ = L_n \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) \right]. \quad (27)$$

Покажем, что при n таких, что

$$q = Cn^\beta \|K^{-1}\| \left(\overline{E}_n^x(k(x,t)) + \overline{E}_n^t(k(x,t)) \right) \ln n < 1,$$

система уравнений (27) имеет единственное решение φ_{0n}^* и справедлива оценка

$$\|\varphi_0^*(x) - \varphi_{0n}^*(x)\| \leq Cn^\beta \|K^{-1}\| \left(\overline{E}_n^x(k(x,t)) + \overline{E}_n^t(k(x,t)) \right) \ln n,$$

где $\varphi_0^*(x)$ и $\varphi_{0n}^*(x)$ — решение уравнения (4) и (27) соответственно.

Система уравнений (17) в операторной форме имеет вид

$$\overline{K}_n \varphi_{0n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi_n(t)}{(t-x)^2} dt + \\ + L_n^x \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} k(x,t) \varphi_n(t) dt \right] = L_n \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) \right]. \quad (28)$$

Оценим норму разности:

$$\begin{aligned}
\|K\varphi_{0n} - \overline{K}_n\varphi_{0n}\| &= \left\| \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} k(x,t) \varphi_n(t) dt - \right. \\
&\quad \left. - L_n^x \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} k(x,t) \varphi_n(t) dt \right] \right\| \leq \\
&\leq \left\| \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} (k(x,t) - k_n^x(x,t)) \varphi_n(t) dt \right\| + \\
&+ \left\| L_n^x \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} (k(x,t) - k_n^x(x,t)) \varphi_n(t) dt \right] \right\| = I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

где $k_n^x(x,t)$ — полином наилучшего равномерного приближения степени $n-1$ по переменной x к функции $k(x,t)$.

Нетрудно видеть, что

$$I_1 \leq Cn^\beta \overline{E}_{n-1}^x(k(x,t)) \|\varphi_{0n}\|,$$

$$I_2 \leq Cn^\beta \|L_n\| \overline{E}_{n-1}^x(k(x,t)) \|\varphi_{0n}\|,$$

и, следовательно,

$$\|K\varphi_{0n} - \overline{K}_n\varphi_{0n}\| \leq Cn^\beta \|L_n\| \overline{E}_{n-1}^x(k(x,t)) \|\varphi_{0n}\|,$$

где

$$\overline{E}_n^x(k(x,t)) = \max_{-1 \leq t \leq 1} E_n^x(k(x,t)).$$

Из последнего неравенства и общей теории приближенных методов для обратных операторов [15] следует, что при n таких, что $q = Cn^\beta \|K^{-1}\| \|L_n\| \overline{E}_{n-1}^x(k(x,t)) < 1$, существует обратный оператор \overline{K}_n^{-1} с нормой $\|\overline{K}_n^{-1}\| \leq \frac{\overline{K}^{-1}}{1-q}$. Оценим норму $\|\overline{K}_n - K_n\|$. Очевидно,

$$\begin{aligned}
&\|\overline{K}_n\varphi_{0n} - K\varphi_{0n}\| = \\
&= \left\| L_n^x \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} (k(x,t) - L_n^t[k(x,t)]) \varphi_n(t) dt \right] \right\| \leq \\
&\leq Cn^\beta \|L_n\| \overline{E}_n^t(k(x,t)) \|\varphi_{0n}\|,
\end{aligned}$$

где

$$\overline{E}_n^t = \max_{-1 \leq t \leq 1} E_n^t(k(x, t)).$$

Пусть существует такое n_0 , что при $n > n_0$ выполняется неравенство

$$Cn^\beta \|\overline{K}_n^{-1}\| \|L_n\| \overline{E}_n^t(k(x, t)) < 1.$$

Из теоремы Банаха [15] следует, что

$$\|\varphi_0^*(x) - \varphi_{0n}^*(x)\| \leq Cn^\beta \left(\|L_n\| \overline{E}_n^x(h(x, t)) + \|L_n\| \overline{E}_n^t(k(x, t)) \right),$$

где $\varphi_0^*(x)$ и $\varphi_{0n}^*(x)$ — решения уравнений (4) и (27) соответственно.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть оператор K имеет обратный. Функции $k(x, t)$ и $f(x)$ принадлежат классу $H_r(\alpha)$. Тогда при n таких, что

$$Cn^\beta \|K^{-1}\| \left(\overline{E}_n^x(k(x, t)) + \overline{E}_n^t(k(x, t)) \right) \ln n < 1,$$

система уравнений (17) (и также (26)) имеет единственное решение и справедлива оценка

$$\|\varphi_0^* - \overline{\varphi}_{0n}^*\| \leq O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\beta}}\right), \quad 0 < \beta < \alpha,$$

где φ_0^* и $\overline{\varphi}_{0n}^*$ — решения уравнений (4) и (17).

Заключение

Получение системы линейных алгебраических уравнений (17), (20), (23), (25) применялось для решения различных тестовых задач. Положительные результаты показали только для вычислительной схемы (17), но остальные схемы (20), (23), (25) не дали нужных результатов. Что касается схемы (17), фактически — это схема для сингулярного интегрального уравнения, так как уравнение (4), когда ищется решение вида $\varphi_0(x) = \sqrt{1-x^2}\varphi(x)$, в этом случае сводится к сингулярному интегральному уравнению, для которого существует единственное решение, т. е. существует обратный оператор K^{-1} , и тогда справедлива выше доказанная теорема. Остальные схемы по-

казывают, что как будто дело имеется с некорректными задачами. Теория сингулярных интегральных уравнений хорошо описывается в книге Н. И. Мусхелишвили [2]. А теория гиперсингулярных интегральных уравнений, как мне кажется, пока не изучена в совершенстве.

Литература

1. Лаврентьев М. А. О построении потока, обтекающего дугу заданной формы. — М.: Гос. авиационное и автотракторное изд-во, 1932. — 56 с. — (Тр. ЦАГИ; Вып. 118.)
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968. — 512 с.
3. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1968. — 288 с.
4. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. — М.: Янус, 1995. — 520 с.
5. Габдулхаев Б. Г., Шарипов Р. Н. Оптимизация квадратурных формул для сингулярных интегралов Коши и Адамара // Конструктивная теория функций и функц. анализ. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1987. — С. 3–48.
6. Саникидзе Д. Г. К численному решению граничных задач методом аппроксимации сингулярных интегралов // Диф. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 9. — С. 1632–1641.
7. Бойков И. В. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений. — Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2004. — 316 с.
8. Бойков И. В., Бойкова А. И., Сёмов М. А. Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений I рода // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. — 2015. — № 3 (35). — С. 11–27.
9. Хубежты Ш. С., Плиева Л. Ю. О квадратурных формулах для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования // Аналитические и численные методы моделирования естеств.-науч. и социальных проблем (28–31 октября 2014 г.). — Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2014. — С. 54–58.
10. Плиева Л. Ю. Квадратурные формулы интерполяционного типа для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2016. — Т. 19, № 4. — С. 413–422.
11. Хубежты Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. — 236 с.
12. Хубежты Ш. С. О численном решении гиперсингулярного интегрального уравнения первого рода // Мат. и компьютер. моделирование естеств.-науч. и социальных проблем (20–22 мая 2015 г.). — Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2015. — С. 134–138.
13. Хубежты Ш. С. О численном решении гиперсингулярных интегральных уравнений I рода с ядром Адамара // Мат. и компьютер. моделирование естеств.-науч. и социальных проблем (23–27 мая 2016 г.). — Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2016. — С. 83–92.

14. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. — М.: Наука, 1967. — 500 с.
15. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984. — 750 с.
16. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. — М.-Л.: ГИФМЛ, 1949. — 688 с.

ХУБЕЖТЫ ШАЛВА СОЛОМОНОВИЧ
Южный математический институт — филиал ВШЦ РАН
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22;
Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Ватутина, 44–46
E-mail: shalva57@rambler.ru

NUMERICAL SOLUTION OF TYPE I HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATION

Khubezhty Sh. S.

This is an overview of the work on numerical methods for solving type I hypersingular integral equations performed recently in South Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.

Key words: hypersingular integral, quadrature formula, computational scheme, error estimation.

АСИМПТОТИКА СПЕКТРОВ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ДВУМЯ СФЕРАМИ

А. С. Черныш

Исследован спектр установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости между двумя пронизаемыми концентрическими сферами. Предполагается, что через одну из сфер жидкость втекает, а через другую — вытекает. На границе области задана полная скорость жидкости. При этих условиях существует радиальный поток, устойчивость которого исследуется при больших числах Рейнольдса, определенных через радиус одной из сфер. С помощью метода Вишика — Люстерника получена формальная асимптотика решения соответствующей спектральной задачи.

Ключевые слова: асимптотика, собственные значения, сингулярное возмущение.

1. Введение

В данной статье исследуется спектр радиального потока между двумя пронизаемыми концентрическими сферами при больших числах Рейнольдса. Исследование спектральных свойств открытых течений представляет интерес, поскольку поведение их спектра при возрастании числа Рейнольдса может существенно отличаться от случая течений с непроницаемыми границами. Так, к примеру, возможно поглощение дискретного спектра непрерывным и т. д.

В последнее время эта тема привлекает внимание многих исследователей. Так, в работах А. Б. Моргулиса и К. И. Ильина (см. [1–3]) исследована устойчивость открытых течений, возникающих между вращающимися цилиндрами. Поскольку рассматриваемый случай представляет собой задачу для сингулярных возмущений, то применяется т. н. метод составных асимптотических разложений. Впервые примененный Л. Прандлем [4] для решения задачи обтекания тела потоком вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса этот метод впоследствии был развит и формализован в работах М. И. Вишика и Л. М. Люстерника [5, 6], а также В. Вазова [7], А. Найфэ [8],

М. Ван-Дайка [9]. В данном случае с помощью этого подхода проводится построение формальной асимптотики дискретного спектра радиального потока.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу для уравнения Навье — Стокса в сферическом слое $D = \{r_1 \leq |\mathbf{x}| \leq r_2\}$, где $r_2 > r_1$:

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{r=r_1} = \gamma_1, \quad (3)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{r=r_2} = \gamma_2, \quad (4)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{v}|_S = \mathbf{v}^+. \quad (5)$$

Здесь $r = |\mathbf{x}|$, \mathbf{n} — орт внешней нормали к сфере, а ρ, ν — плотность и вязкость жидкости соответственно. Заданное векторное поле \mathbf{v}^+ определяет тангенциальную скорость течения. Через γ_1, γ_2 обозначены ненулевые скалярные функции, задающие нормальную скорость на границе и связанные соотношением

$$\int_{r=r_1} \gamma_1 ds = \int_{r=r_2} \gamma_2 ds. \quad (6)$$

Последнее уравнение равносильно предположению, что расход потока через границу области постоянен. Иными словами, сколько жидкости втекает в область — столько и вытекает.

Заметим, что как только заданы функции γ_1 и γ_2 , мы можем определить вход и выход потока. Так, если $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 < 0$, то $\{r = r_1\}$ — вход потока, а $\{r = r_2\}$ — выход, и наоборот, если $\gamma_1 < 0$ и $\gamma_2 > 0$.

Предположим, что γ_1 и γ_2 постоянны, а тангенциальная скорость \mathbf{v}^+ равна нулю. В этом случае целесообразно перейти к безразмерным переменным. Для этого сделаем замену, приняв в качестве масштаба измерения скорости γ_1 , времени — $\gamma_1, r_1/\gamma_1$, а давления — $\rho\gamma_1^2$. В итоге система (1)–(5) примет вид

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{R}\Delta \mathbf{v},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{r=1} &= 1, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{r=a} &= \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \\ \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_S &= 0.\end{aligned}$$

Легко видеть, что существует единственное течение, симметричное относительно любых вращений в R^3 . Оно представимо в виде

$$\mathbf{V} = \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (7)$$

Кроме того, это течение имеет потенциал $\phi = -\frac{1}{r}$.

3. Линеаризация

Исследуем спектр равновесия (7) в предположении, что жидкость поступает в область через поверхность сферы меньшего радиуса. Прежде всего, линеаризуем задачу (1)–(5) вблизи этого течения, сделав замену

$$\mathbf{v} = e^{\lambda t} \tilde{\mathbf{v}}(x), \quad p = e^{\lambda t} \tilde{p}(x).$$

В дальнейшем функции \tilde{p} , $\tilde{\mathbf{v}}$ будем обозначать через p , \mathbf{v} соответственно. В результате перейдем к следующей спектральной задаче:

$$\lambda \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{R} \Delta \mathbf{v}, \quad (8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_S = 0, \quad (10)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{n}|_S = 0, \quad (11)$$

где $\Delta \mathbf{v} = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{v})$.

Чтобы исключить давление p из задачи (8)–(11), спроектируем уравнение (8) на пространство соленоидальных векторных полей, заданных на сферическом слое $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq |\mathbf{x}| \leq a\}$, $a > 1$. Будем обозначать пространство таких полей через $\mathbf{S}(B)$.

Умножим (8) скалярно на $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{S}(B)$ и учтем, что потенциальные поля ортогональны соленоидальным относительно скалярного произведения в $\mathbf{L}_2(B)$. Таким образом, задачу (8)–(11) можно переписать в виде

$$\left(\lambda \mathbf{v} - \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} + \frac{1}{R} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{f} \right)_{\mathbf{L}_2(B)} = 0 \quad (\forall \mathbf{f} \in \mathbf{S}(B)), \quad (12)$$

$$\mathbf{v} \in \mathbf{S}(B), \quad \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_S = 0, \quad (13)$$

где

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_{\mathbf{L}_2(B)} = \int_B \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \, d\mathbf{x}.$$

4. Разложение спектра

Чтобы описать спектр течения \mathbf{V} , разложим решение $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ задачи (12)–(13) и функцию $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{S}(B)$ в ряд Фурье по системе векторных сферических гармоник. Последние определяются следующим образом (см. [10, 11]):

$$\mathbf{Y}_{ml}^{(-1)}(\theta, \phi) = \mathbf{e}_r Y_{ml}(\theta, \phi), \quad (14)$$

$$\mathbf{Y}_{ml}^{(0)}(\theta, \phi) = \nabla_\Omega Y_{ml}(\theta, \phi), \quad (15)$$

$$\mathbf{Y}_{ml}^{(1)}(\theta, \phi) = (\mathbf{e}_r \times \nabla_\Omega) Y_{ml}(\theta, \phi), \quad (16)$$

где

$$\nabla_\Omega = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi.$$

Через $Y_l^m(\theta, \phi)$ обозначена нормированная в $L_2([0, \pi] \times [0, 2\pi])$ скалярная сферическая функция, выражаемая по формуле

$$Y_{ml} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad |m| \leq l,$$

где $P_l^{|m|}$ — присоединенная функция Лежандра порядка l , а $\mu_l = l(l+1)$ — собственное значение сферической функции для оператора Бельтрами (см. [12]).

Таким образом, функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbf{S}(B)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ будем искать в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{\alpha=-1}^1 f_{ml}^{(\alpha)}(r) \mathbf{Y}_{ml}^{(\alpha)}(\theta, \phi), \quad (17)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{\alpha=-1}^1 C_{ml}^{(\alpha)} v_{ml}^{(\alpha)}(r) \mathbf{Y}_{ml}^{(\alpha)}(\theta, \phi). \quad (18)$$

Подставим теперь выражения (17), (18) в (12) и соберем слагаемые при сферических гармониках одного порядка. Учитывая это, индекс l будем опускать. В результате получаем уравнение

$$\sum_{m=-l}^l \sum_{\alpha=-1}^1 \left(\lambda l_m^{(\alpha)}[\mathbf{v}] + \frac{1}{R} D_m^{(\alpha)}[\mathbf{v}] + G_m^{(\alpha)}[\mathbf{v}], f_m^{(\alpha)} \right)_{L^2(1,a)} = 0, \quad (19)$$

где действие операторов $l_m^{(\alpha)}$, $D_m^{(\alpha)}$, $G_m^{(\alpha)}$ на поле \mathbf{v} выражается через функции $v_m^{(\alpha)}$. Поскольку $\mathbf{v}, \mathbf{f} \in \mathbf{S}(B)$, то компоненты этих векторных полей связаны соотношением вида

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 f_m^{(-1)} \right) = \frac{\mu_l}{r} f_m^{(0)}.$$

Последнее позволяет исключить из уравнения (19) слагаемые, содержащие $v_m^{(0)}$ и $f_m^{(0)}$. Полученное в результате уравнение может быть переписано в виде системы

$$\lambda \begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{(-1)} \\ \mathbf{C}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{U}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \widehat{\mathbf{W}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{(-1)} \\ \mathbf{C}^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Здесь $\mathbf{C}^{(\alpha)} = (C_{-l}^{(\alpha)}, C_{-l+1}^{(\alpha)}, \dots, C_l^{(\alpha)})^T$, $\mathbf{U}, \mathbf{W}, \widehat{\mathbf{U}}, \widehat{\mathbf{W}}$ — диагональные матрицы, элементы которых выражаются по формулам

$$U_m^m = \left(\mathcal{L} v_m^{(-1)}, f_m^{(-1)} \right)_{L(1,a)}, \quad (21)$$

$$W_m^m = \left(\mu_l v_m^{(1)}, f_m^{(1)} \right)_{L(1,a)}, \quad (22)$$

$$\widehat{U}_m^m = \left(\frac{1}{R} \left[\frac{d^2}{dr^2} \mathcal{L} v_m^{(-1)} - \frac{\mu_l}{r^2} \mathcal{L} v_m^{(-1)} \right] - \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} \mathcal{L} v_m^{(-1)}, f_m^{(-1)} \right)_{L(1,a)}, \quad (23)$$

$$\widehat{W}_m^m = \left(\frac{\mu_l}{R} \left[\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r v_m^{(1)}) - \frac{\mu_l}{r^2} v_m^{(1)} \right] - \frac{\mu_l}{r^3} \frac{d}{dr} (r v_m^{(1)}), f_m^{(1)} \right)_{L(1,a)}, \quad (24)$$

где

$$\mathcal{L} v = v - \frac{1}{\mu_l} \frac{d^2}{dr^2} (r^2 v).$$

Условие разрешимости системы (25) имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{U}} - \lambda \mathbf{U} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \widehat{\mathbf{W}} - \lambda \mathbf{W} \end{pmatrix} = 0. \quad (25)$$

Известно, что определитель диагональной матрицы равен произведению ее элементов. Таким образом, справедливо, по крайней мере, одно из следующих соотношений:

$$\left(\frac{\mu_l}{r^2 R} \mathcal{L}^* \mathcal{L} v_m^{(-1)} - \left(\lambda + \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} \right) \mathcal{L} v_m^{(-1)}, f_m^{(-1)} \right)_{L(1,a)} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{Rr} \frac{d^2}{dr^2} (rv_m^{(1)}) - \frac{\mu_l}{Rr^2} v_m^{(1)} - \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (rv_m^{(1)}) - \lambda v_m^{(1)}, f_m^{(1)} \right)_{L(1,a)} = 0,$$

где

$$\mathcal{L}^* v = \frac{r^2}{\mu_l} \frac{d^2 v}{dr^2} - v.$$

Следовательно, спектр рассматриваемой задачи представим в виде

$$\sigma(\mathbf{V}) = \bigcup_{l=1}^{\infty} \{ \sigma_l(w) \cup \sigma_l(u) \}. \quad (26)$$

Здесь множество $\sigma_l(w)$ состоит из спектра задачи

$$\left(\lambda + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \right) w = \frac{\mu_l}{r^2 R} \mathcal{L}^* w, \quad (27)$$

$$w|_{r=1} = 0, \quad (28)$$

$$w|_{r=a} = 0. \quad (29)$$

В свою очередь, множество $\sigma_l(u)$ — это спектр следующей задачи:

$$\left(\lambda + \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} \right) \mathcal{L} u = \frac{\mu_l}{r^2 R} \mathcal{L}^* \mathcal{L} u, \quad (30)$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad (31)$$

$$u|_{r=a} = 0, \quad (32)$$

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=1} = 0, \quad (33)$$

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=a} = 0. \quad (34)$$

5. Описание спектра $\sigma_l(w)$

Теперь рассмотрим задачу (27)–(29). Заметим, что уравнение (27) можно записать в виде

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(e^{\frac{R}{r}} \frac{dw}{dr} \right) - \left(\frac{\mu_l}{r^2 R} + \lambda \right) w = 0. \quad (35)$$

Из общих результатов о спектральных свойствах оператора Штурма — Лиувилля (см. [13]) следует, что множество собственных значений счетно и имеет единственную бесконечно удаленную предельную точку. Таким образом, собственные значения можно пронумеровать в порядке убывания следующим образом:

$$0 > \lambda_{1,l} \geq \lambda_{2,l} \geq \dots \geq \lambda_{n,l} \geq \dots > -\infty.$$

Кроме того, умножив уравнение (35) на w и проинтегрировав полученное выражение от 1 до a , получаем следующее:

$$\lambda_l = -\frac{\frac{1}{R} \int_1^a e^{\frac{R}{r}} \left\{ \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{\mu_l}{r^2} w^2 \right\} dr}{\int_1^a e^{\frac{R}{r}} w^2 dr}.$$

Применим к последнему выражению одномерное неравенство Фридрикса:

$$\int_1^a |f(x)|^2 dx \leq \frac{a-1}{2} \int_1^a \left| \frac{df(x)}{dx} \right|^2 dx.$$

В результате получим оценку для собственных значений:

$$\lambda_{n,l} \leq -\frac{e^{R(\frac{1}{a}-1)}}{R} \left(\frac{2}{a-1} + \frac{\mu_l}{a^2} \right) \quad (\forall n \geq 1).$$

Таким образом, дискретный спектр рассматриваемой задачи устойчив при $R < \infty$.

6. Асимптотика спектра $\sigma_l(u)$

Теперь построим асимптотику решения задачи (30)–(34). Будем искать асимптотику в виде рядов по отрицательным степеням R :

$$\lambda = \lambda_0 + R^{-1} \lambda_1 + R^{-2} \lambda_2 + \dots, \quad (36)$$

$$u(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n^i(r)}{R^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^b(s)}{R^n}, \quad (37)$$

где $s = R(a - r)$. Здесь ряд в правой части (37), состоящий из функций $u_n^i(r)$, описывает функцию, удовлетворяющую уравнению (30) и условиям (31)–(33) и называемую *внешним разложением*. Оставшемуся условию (34) внутреннее разложение не может удовлетворить, поскольку уравнение (30) в пределе при $R \rightarrow \infty$ вырождается в уравнение 3-го порядка. В свою очередь, ряд, образованный функциями $u_n^b(r)$ и называемый внешним разложением, обеспечивает поправку внутреннего разложения, удовлетворяя условию (34). При этом, чтобы эти поправки не «ухудшили» найденное решение, на поправочные функции u_n^b накладывается условие исчезания на бесконечности:

$$u_n^b(s) = o(s^{-k}), \quad n \geq 1. \quad (38)$$

1. Внутреннее разложение. Чтобы получить задачу для произвольного члена внутреннего решения, подставим ряд

$$u(r) = u_0^i(r) + R^{-1}u_1^i(r) + R^{-2}u_2^i(r) + \dots \quad (39)$$

в уравнение (19) и приравняем к нулю слагаемые при степенях R . В результате получим уравнение

$$\left(\lambda_0 + \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} \right) \mathcal{L}u_n^i = F_n(u_{n-1}^i, u_{n-2}^i, \dots, u_0^i), \quad (40)$$

где

$$F_0(u_{n-1}^i, u_{n-2}^i, \dots, u_0^i) = 0,$$

$$F_n(u_{n-1}^i, u_{n-2}^i, \dots, u_0^i) = - \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{L}u_{n-i}^i + \frac{\mu_l}{r^2} \mathcal{L}^* \mathcal{L}u_{n-1}^i, \quad n \geq 1.$$

Для u_0^i получаем задачу

$$\left(\lambda_0 + \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} \right) \mathcal{L}u_0^i = 0, \quad (41)$$

$$u_0^i|_{r=1} = 0, \quad (42)$$

$$u_0^i|_{r=a} = 0, \quad (43)$$

$$\left. \frac{du_0^i}{dr} \right|_{r=1} = 0. \quad (44)$$

Легко видеть, что из уравнения (41) следует соотношение

$$\mathcal{L}u_0^i = Cr^2e^{-h(r)}, \quad h(r) = \sigma_0(r^3 - 1). \quad (45)$$

Здесь $\sigma = \frac{\lambda}{3}$ — новый спектральный параметр, C — произвольная постоянная. В результате получена краевая задача для неоднородного уравнения Эйлера. С помощью формулы Грина легко получить решение этой задачи:

$$u_0^i(r) = C \left(g(r) \int_1^r k(t)t^4 e^{-h(r)} dt + k(r) \int_r^a g(t)t^4 e^{-h(r)} dt \right). \quad (46)$$

Здесь $k(r) = r^{l-1} - r^{-l-2}$, $g(r) = a^{-l}r^{l-1} - a^{l+1}r^{-l-2}$.

Из условия (44) получаем уравнение для σ_0 :

$$\int_1^a (a^{-l}r^{l+1} - a^{l+1}r^{-l}) r^2 e^{-\sigma_0(r^3-1)} dr = 0. \quad (47)$$

2. Внешнее разложение. Подставив (37) в (34), получим следующие соотношения между членами внешнего и внутреннего разложений:

$$u_0^i|_{r=a} = 0, \quad (48)$$

$$\left. \frac{du_0^i}{dr} \right|_{r=a} - \frac{1}{a} \left. \frac{du_0^b}{ds} \right|_{s=0} = 0, \quad (49)$$

$$u_1^i|_{r=a} + u_0^b|_{s=0} = 0, \quad (50)$$

$$\left. \frac{du_1^i}{dr} \right|_{r=a} - \frac{1}{a} \left. \frac{du_1^b}{ds} \right|_{s=0} = 0, \quad (51)$$

.....

Чтобы получить уравнение для u_n^b , подставим ряд (37) в (30), представив каждую функцию u_n^i рядом Тейлора в точке $r = a$, и приравняем к нулю слагаемые при одинаковых степенях R . В частности, для u_0^b получим задачу

$$a^2 \frac{d^4 u_0^b}{ds^4} + \frac{d^3 u_0^b}{ds^3} = 0,$$

$$\left. \frac{du_0^b}{ds} \right|_{s=0} = a \left. \frac{du_0^i}{dr} \right|_{r=a}.$$

Решение, удовлетворяющее условию (38), имеет вид

$$u_0^b(s) = \Lambda_0 e^{-\frac{s}{a^2}}, \quad (52)$$

где

$$\Lambda_0 = -a^2 \frac{du_1^i}{dr} \Big|_{r=a}.$$

С учетом равенства (46) последнее выражение можем переписать следующим образом:

$$\Lambda_0 = \int_1^a (r^{l+1} - r^{-l}) r^2 e^{-\sigma_0(r^3-1)} dr.$$

3. Следующее приближение собственного значения. Будем определять σ_1 из уравнения

$$\mathcal{K} u_1^i = -\sigma_1 \mathcal{L} u_0^i + \frac{\mu_l}{r^2} \mathcal{L}^* \mathcal{L} u_0^i, \quad (53)$$

где

$$\mathcal{K} u = e^{-h(r)} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{h(r)}}{r^2} \mathcal{L} u \right). \quad (54)$$

С помощью интегрирования по частям несложно получить выражение для оператора, сопряженного к \mathcal{K} в смысле скалярного произведения:

$$\langle g, f \rangle = \int_1^a \bar{g}(r) f(r) dr.$$

Это оператор (обозначим его через \mathcal{K}^*) имеет вид

$$\mathcal{K}^* f = \mathcal{L}^* \left(\frac{e^{\bar{h}(r)}}{r^2} \frac{d}{dr} \left(e^{-\bar{h}(r)} f \right) \right).$$

Предположим теперь, что существует функция g , определяемая из задачи

$$\mathcal{K}^* g = 0, \quad (55)$$

$$g|_{r=1} = 0, \quad (56)$$

$$g|_{r=a} = 0, \quad (57)$$

$$\frac{dg}{dr} \Big|_{r=a} = 0. \quad (58)$$

Тогда, умножив уравнение скалярно на g , получим выражение для σ_1 :

$$\sigma_1 = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_2},$$

где

$$Q_1 = \langle \mathcal{K} u_1^i, g \rangle, \quad Q_2 = \langle \mathcal{L} u_0^i, g \rangle, \quad Q_3 = \mu_l \left\langle \frac{1}{r^2} \mathcal{L}^* \mathcal{L} u_0^i, g \right\rangle.$$

Построим теперь решение задачи (55)–(58). Из уравнения (55) получаем соотношение

$$\frac{e^{\bar{h}(r)}}{r^2} \frac{d}{dr} \left(e^{-\bar{h}(r)} g(r) \right) = C_1 r^{l+1} + C_2 r^{-l}.$$

Следовательно, общее решение (55) имеет вид

$$g(r) = e^{\bar{h}(r)} \int_1^r (C_1 t^{l+3} + C_2 t^{-l+2}) e^{-\bar{h}(t)} dt + C_3 e^{\bar{h}(r)}.$$

Из условия (56) следует, что $C_3 = 0$. В свою очередь, (57) влечет соотношение

$$\int_1^a (C_1 t^{l+3} + C_2 t^{-l+2}) e^{-\bar{h}(t)} dt = 0.$$

Также из условия (58) следует равенство

$$C_2 = -C_1 a^{2l+1}.$$

Таким образом, получаем окончательное выражение для g :

$$g(r) = C e^{\bar{h}(r)} \int_1^r (a^{-l} t^{l+1} - a^{l+1} t^{-l}) t^2 e^{-\bar{h}(t)} dt. \quad (59)$$

Интегрируя по частям и пользуясь условием (50), приходим к соотношению

$$Q_1 = \frac{a^2}{3} \Lambda_0 \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{\bar{h}(r)}}{r^2} \frac{d}{dr} \left(e^{-\bar{h}(r)} g(r) \right) \right) \Big|_{r=a}.$$

При этом Q_2, Q_3 выражаются по формулам

$$Q_2 = -\frac{C}{9} \int_1^a (a^{-l} r^{l+1} - a^{l+1} r^{-l}) r^5 e^{-\bar{h}(r)} dr,$$

$$Q_3 = \frac{C}{3\mu_l} \int_1^a (a^{-l} r^{l+1} - a^{l+1} r^{-l}) P(r) e^{-\bar{h}(r)} dr,$$

где

$$P(r) = \sigma_0 r^5 - r^4 + r^3.$$

4. Члены высших порядков. Покажем теперь, что если определены функции u_{n-1}^i и u_{n-1}^b , то можно определить следующие члены в разложении решения рассматриваемой задачи.

Задача для u_n^i имеет вид

$$\left(\sigma_0 + \frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} \right) \mathcal{L} u_n^i = - \sum_{i=1}^n \sigma_i \mathcal{L} u_{n-i}^i + \frac{\mu_l}{r^2} \mathcal{L}^* \mathcal{L} u_{n-1}^i, \quad (60)$$

$$u_n^i|_{r=1} = 0, \quad (61)$$

$$\left. \frac{du_n^i}{dr} \right|_{r=1} = 0, \quad (62)$$

$$\left. \frac{du_n^i}{dr} \right|_{r=a} = -u_{n-1}^b|_{s=0}. \quad (63)$$

Из уравнения (60) получаем соотношение

$$\mathcal{L} u_n^i = C(r) r^2 e^{-h(r)}, \quad (64)$$

где

$$C(r) = \int_0^r G(t) e^{h(t)} dt, \quad G(r) = \frac{\mu_l}{r^2} \mathcal{L}^* \mathcal{L} u_{n-1}^i - \sum_{i=1}^n \sigma_i \mathcal{L} u_{n-i}^i.$$

Решая уравнение (64) с условиями (61)–(63), получаем

$$u_n^i(r) = b(r) \int_1^r k(t) t^4 C(r) e^{-h(r)} dt + k(r) \int_r^a b(t) t^4 C(r) e^{-h(r)} dt,$$

где

$$k(r) = r^{l-1} - r^{-l-2}, \quad b(r) = \tilde{C} (r^{l-1} - r^{-l-2}), \quad \tilde{C} = \frac{u_{n-1}^b(0)}{a^{l-1}(a^{-2l-1} - 1)}.$$

В свою очередь, u_n^i определяется из задачи

$$a^2 \frac{d^4 u_n^b}{ds^4} + \frac{d^3 u_n^b}{ds^3} = W_n^k(s) e^{-\frac{s}{a^2}},$$

$$\left. \frac{du_n^b}{ds} \right|_{s=0} = a \left. \frac{du_n^i}{dr} \right|_{r=a},$$

где

$$W_n^k(s) = \sum_{j=0}^k b_{j,n} s^j.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$u_n^b(s) = [\Lambda_n + P_n(s)] e^{-\frac{s}{a^2}},$$

$$\Lambda_n = \overline{C} [(l-1)a^l + (l+2)a^{-l-1}] C(a) e^{-h(a)} \int_1^a f(r) r^4 dr.$$

Через $P_n(s)$ здесь обозначен многочлен вида $P_n(s) = \sum_{j=0}^k c_{j,n} s^{j+1}$, коэффициенты которого определяются с помощью метода неопределенных коэффициентов из системы

$$\begin{aligned} 24a^2 c_{3,n} - 18c_{2,n} + \frac{6}{a^2} c_{1,n} - \frac{1}{a^4} c_{0,n} &= b_{0,n}, \\ 120a^2 c_{4,n} - 72c_{3,n} + \frac{18}{a^2} c_{2,n} - \frac{2}{a^4} c_{1,n} &= b_{1,n}, \\ \dots\dots\dots \\ (k+4)! a^2 c_{k+3,n} - 3(k+3)! c_{k+2,n} + \frac{3(k+2)!}{a^2} c_{k+1,n} - \frac{k+1}{a^4} c_{k,n} &= b_{k,n}, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Собственное значение σ_n будем находить из условия разрешимости уравнения:

$$\mathcal{K} u_n^i = -\sigma_n \mathcal{L} u_0^i - \sum_{i=1}^n \sigma_i \mathcal{L} u_{n-i}^i + \frac{\mu_l}{r^2} \mathcal{L}^* \mathcal{L} u_{n-1}^i. \quad (65)$$

Умножая (65) на функцию g , определенную в (59), получаем

$$\sigma_n = \frac{Q_{4,n} + Q_{3,n} - Q_{1,n}}{Q_2},$$

где

$$Q_{1,n} = \frac{a^2}{3} \frac{d}{dr} \left([\Lambda_n + P_n(s)] \frac{e^{\bar{h}(r)}}{r^2} \frac{d}{dr} \left(e^{-\bar{h}(r)} g(r) \right) \right) \Big|_{r=a},$$

$$Q_{3,n} = \mu_l \left\langle \frac{1}{r^2} \mathcal{L}^* \mathcal{L} u_{n-1}^i, g \right\rangle,$$

$$Q_{4,n} = \sum_{i=1}^n \sigma_i \langle \mathcal{L} u_{n-i}^i, g \rangle.$$

Литература

1. Ilin K., Morgulis A. Instability of an inviscid flow between porous cylinders with radial flow // J. Fluid Mech. — 2013. — № 730. — P. 364–378.
2. Ильин К. И., Моргулис А. Б. О спектрах открытых течений идеальной жидкости в кольцевых областях // Мат. форум. Т. 8, ч. 2. Исслед. по диф. уравнениям, мат. моделированию и проблемам мат. образования. — Владикавказ: ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, 2014. — С. 112–123. — (Итоги науки. Юг России.)
3. Ilin K., Morgulis A. Instability of a two-dimensional viscous flow in an annulus with permeable walls to two-dimensional perturbations // Physics of Fluids. — 2015. — Vol. 27, iss. 4. — AN: 044107. DOI: 10.1063/1.4919095.
4. Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlg. III // Intern. Math. Kongr., Heidelberg. — 1904. — P. 484–491.
5. Вишик М. И., Люстерник Л. М. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. — 1957. — Т. 12, № 5. — С. 3–122.
6. Вишик М. И., Люстерник Л. М. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1960. — Т. 15, № 3. — С. 3–80.
7. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 448 с.
8. Найфэ А. Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984. — 535 с.
9. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967. — 310 с.
10. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 942 с.
11. Hill E. L. The theory of vector spherical harmonics // Am. J. Phys. — 1954. — № 22. — P. 211–214.
12. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
13. Михлин С. Г. Курс математической физики. — М.: Наука, 1968. — 576 с.

Черныш Алексей Сергеевич
Южный федеральный университет
РОССИЯ, 344099, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: alchernysh@sfedu.ru

THE STATIONARY FLOW STABILITY
OF SPECTRA ASYMPTOTICS
OF AN INCOMPRESSIBLE FLUID
IN THE GAP BETWEEN THE TWO AREAS

Chernysh A. S.

The spectrum of the steady flow of viscous incompressible fluid between two permeable concentric spheres is studied. It is assumed that liquid flows through one of the spheres and follows through the another. At the border area full fluid velocity is set. Under these conditions, there is a radial flow. Stability of this flow is examined at high Reynolds numbers defined by a radius of the spheres. Formal asymptotic solution of the corresponding spectral problem is obtained by using Vishik–Lyusternik method.

Key words: asymptotics, eigenvalue, singular perturbation.

III. Современные проблемы математического образования

ОСОБЕННОСТИ СИНЕРГИИ АЛГОРИТМОВ
И ИССЛЕДОВАНИЯ МНОЖЕСТВ ЖЮЛИА
ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА¹А. С. Бабенко, Д. В. Елкин,
А. А. Пигузов, В. С. Секованов,
Е. И. Смирнов

В статье рассматриваются множество Жюлиа полиномов Чебышева. С помощью математических методов в качестве примера доказывается, что это множество Жюлиа многочлена Чебышева $f(z) = z^5 - 5z^3 + 5z$ есть отрезок $[-2; 2]$. Разработан алгоритм построения множества Жюлиа для полиномов Чебышева. Указаны методические приемы изучения множества Жюлиа полиномов Чебышева.

Ключевые слова: алгоритм, множество Жюлиа, полином Чебышева, неподвижные и периодические точки, орбита точки.

Исследованию фракталов на комплексной плоскости посвящены многочисленные работы в различных разделах современной математики [1–10]. Особый интерес в исследовании фракталов на комплексной плоскости вызывают фрактальные множества Жюлиа и множества Мандельброта с использованием компьютерных технологий. При этом визуально наблюдается эффект самоорганизации сложного объекта при исследовании итераций функции $w = z^2 + c$ в комплексной плоскости (см. [1]). Результатом данной работы является выявление множеств Жюлиа от многочленов Чебышева, которые иногда совпадают с отрезком, и построение данных множеств с помощью информационных и коммуникационных технологий (ИКТ). В различных учебных пособиях и монографиях, связанных с фрактальной геометрией, часто указывается, что множества Жюлиа являются фракталами. Однако данный тезис не всегда имеет место,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного Фонда, проект № 16-18-10304.

что подтверждают результаты данной статьи, где построен универсальный алгоритм выявления гладких множеств Жюлиа (отрезков) от многочленов (подобных многочленам Чебышева на отрезке $[-1; 1]$) и в качестве примера показано, что множество Жюлиа для многочлена Чебышева пятой степени $f(z) = z^5 - 5z^3 + 5z$ есть отрезок $[-2; 2]$. Такой подход дает возможность бакалаврам, магистрам и аспирантам глубже проникнуть в тайны фрактальной геометрии, находящей приложения в различных разделах науки.

Многочлены Чебышева определяются с помощью рекуррентных соотношений:

$$P_0(z) = 2, \quad P_1(z) = z, \quad P_2(z) = z^2 - 2, \dots, \\ P_{n+1}(z) = zP_n(z) - P_{n-1}(z).$$

Замечаем, что

$$P_3(z) = z(z^2 - 2) - z = z^3 - 3z, \\ P_4(z) = z(z^3 - 3z) - (z^2 - 2) = z^4 - 4z^2 + 2, \\ P_5(z) = z(z^4 - 4z^2 + 2) - (z^3 - 3z) = z^5 - 5z^3 + 5z.$$

В данной работе мы исследуем орбиты точек комплексных полиномов Чебышева, с помощью которых определяются множества Жюлиа; орбита точки непосредственно связана с итерационными процессами. Мы должны иметь в виду, что при операции итерирования функции множество ее значений становится областью определения функции, являющейся второй итерацией. Поэтому необходимо выполнение включения $E(f(z)) \subseteq D(f^{(2)}(z))$.

Пусть на отрезке $[-2; 2]$ задана функция $f(z) = z^5 - 5z^3 + 5z$. Покажем, что множеством значений функции $f(z)$ также является отрезок $[-2; 2]$. Исследуем функцию $f(z) = z^5 - 5z^3 + 5z$, заданную на отрезке $[-2; 2]$, с помощью средств дифференциального исчисления. Находим производную функции:

$$f'(z) = (z^5 - 5z^3 + 5z)' = 5z^4 - 15z^2 + 5.$$

Решая биквадратное уравнение $5z^4 - 15z^2 + 5 = 0$, вычисляем его корни

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \approx \pm 1,618, \quad z_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \approx \pm 0,618.$$

Поскольку данная функция нечетна, то достаточно исследовать ее на отрезке $[0; 2]$. Замечаем, что на интервале $(0; \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}})$ функция возрастает, на интервале $(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}; \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}})$ — убывает, на интервале $(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}; 2)$ — возрастает. После несложных вычислений заключаем (рис. 1), что $\max_{z \in [-2; 2]} f(z) = 2$, $\min_{z \in [-2; 2]} f(z) = -2$.

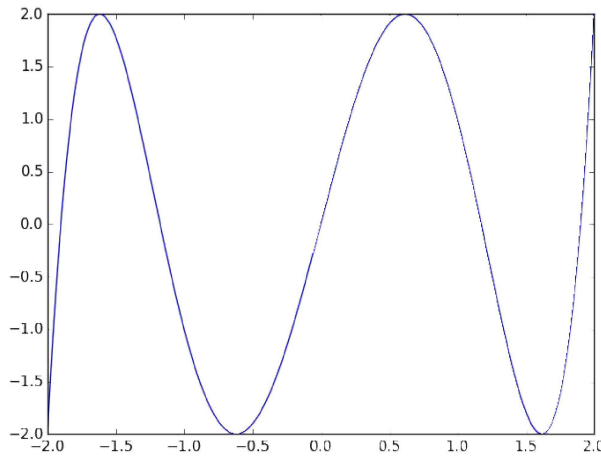


Рис. 1. График функции $f(z) = z^5 - 5z^3 + 5z$.

Опишем функцию построения полинома Чебышева (возможно любой степени). Блок-схема, изображенная на рис. 2, указывает алгоритм построения многочлена Чебышева.

Покажем, что множеством Жюлиа функции $f(z) = z^5 - 5z^3 + 5z$ будет отрезок $[-2; 2]$. Схема доказательства: рассмотрим отображение $h(w) = w + \frac{1}{w}$. Заметим, что $z = h(w)$ отображает единичную окружность S радиуса 1 с центром в начале координат ($|w| = 1$) на отрезок $[-2; 2]$.

Действительно, пусть $w = e^{i\theta}$, $\theta \in [0; 2\pi]$. Тогда

$$\begin{aligned} z &= h(w) = h(e^{i\theta}) = e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} = \\ &= \cos \theta + i \sin \theta + \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = 2 \cos(\theta). \end{aligned}$$

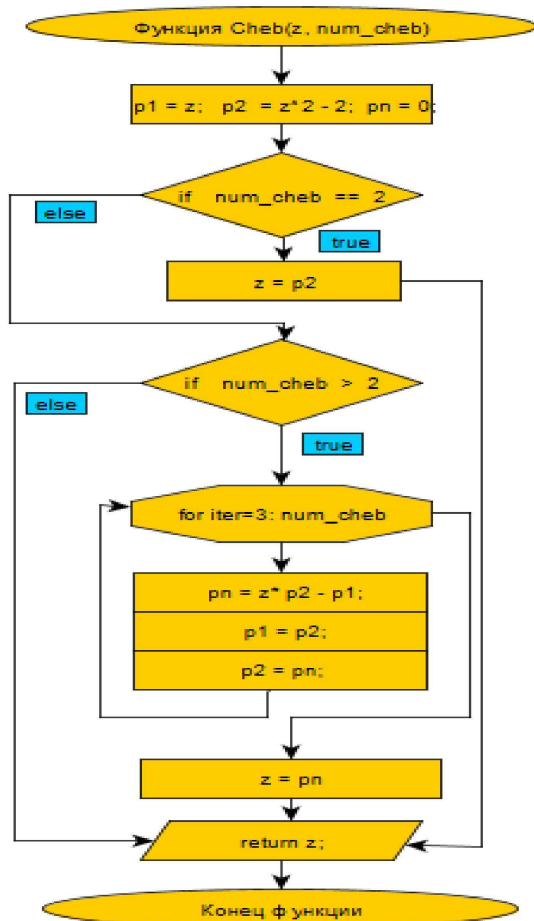


Рис. 2. Алгоритм построения многочлена Чебышева.

Отметим, что $2 \cos(\theta)$ имеет два прообраза $w_1 = e^{i\theta}$, $w_2 = e^{-i\theta}$. Следовательно, если $\theta \in [0; 2\pi]$, $w = e^{i\theta} \in S$, то $2 \cos(\theta) \in [-2; 2]$. Далее покажем, что если $w \notin S$, то $z = h(w) \notin [-2; 2]$. Действительно, $z = h(w) = w + \frac{1}{w}$ определяет уравнение $w^2 - wz + 1 = 0$. Согласно теореме Виета корни w_1 , w_2 уравнения удовлетворяют равенству $w_1 \bullet w_2 = 1$. Пусть $w \notin S$ является одним из корней этого уравнения. Тогда либо $|w| > 1$, либо $|w| < 1$ (т. е. одно из решений уравнения

$w^2 - wz + 1 = 0$ лежит внутри единичного круга с центром в начале координат, а другое — вне круга).

Пусть $|w| > 1$. Тогда $w = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 1$, $\theta \in [0; 2\pi]$. Далее имеем

$$\begin{aligned} h(w) &= w + \frac{1}{w} = \rho e^{i\theta} + \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{i\theta} + \rho e^{-i\theta} = \\ &= \rho(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{\rho}(\cos \theta - i \sin \theta) = \\ &= \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos \theta + i \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \sin \theta. \end{aligned}$$

Заметим, что мнимая часть выражения $w + \frac{1}{w}$ равна нулю тогда и только тогда, когда $\theta = 0$ или $\theta = 2\pi$. Но в этих случаях $w + \frac{1}{w} = \rho + \frac{1}{\rho} > 2$. Если $\theta \in [0; 2\pi]$ и $\theta \neq 0$, $\theta \neq 2\pi$, то мнимая часть выражения $w + \frac{1}{w}$ не равна нулю. Таким образом, $w + \frac{1}{w} \in \mathbb{C} \setminus [-2; 2]$, и внешность круга, ограниченного окружностью S , отображается на внешность отрезка $[-2; 2]$. Более того, функция $h(w) = w + \frac{1}{w}$ изоморфно отображает внешность замкнутого единичного круга с центром в начале координат на $\mathbb{C} \setminus [-2; 2]$. Далее покажем, что $f(h(w)) = h(w^5)$. Имеем

$$\begin{aligned} f(h(w)) &= \left(w + \frac{1}{w}\right)^5 - 5 \left(w + \frac{1}{w}\right)^3 + 5 \left(w + \frac{1}{w}\right) = \\ &= w^5 + 5w^3 + 10w + \frac{10}{w} + \frac{5}{w^3} + \frac{1}{w^5} - 5w^3 - \frac{15}{w} - \\ &\quad - 15w - \frac{5}{w^3} + 5w + \frac{5}{w} = w^5 + \frac{5}{w^5} = h(w^5). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(h(w)) = h(w^5).$$

Далее рассмотрим орбиту точки $z = h(w)$. Имеем

$$f^{(2)}(h(w)) = f(f(h(w))) = f(h(w^5)) = h(w^{5^2}).$$

Аналогично продолжая данный процесс, получим

$$f^{(n)}(h(w)) = f\left(f^{(n-1)}(h(w))\right) = w^{5^n} + \frac{1}{w^{5^n}}$$

и т. д.

Таким образом, если $z \notin [-2; 2]$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f^{(n)}(h(w)) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[w^{5^n} + \frac{1}{w^{5^n}} \right] = \infty.$$

Поскольку $f([-2; 2]) \subset [-2; 2]$ (рис. 1), то для каждого $z \notin [-2; 2]$ орбита точки $z = h(w)$ ограничена. Таким образом,

$$j(f) = \partial \left(z \in \mathbb{C} : f^{(n)}(z) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty \right) = [-2; 2].$$

Т. е. множество Жюлиа для функции $f(z) = z^5 - 5z^3 + 5z$ является отрезок $[-2; 2]$. Заметим, что множество Жюлиа

$$j(f) = \partial \left(z \in \mathbb{C} : f^{(n)}(z) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty \right) = [-2; 2]$$

не является фракталом, и заполняющим множеством Жюлиа функции $f(z) = z^5 - 5z^3 + 5z$ также будет отрезок $[-2; 2]$.

Опишем алгоритм построения множества Жюлиа для полиномов Чебышева (рис. 3–6).

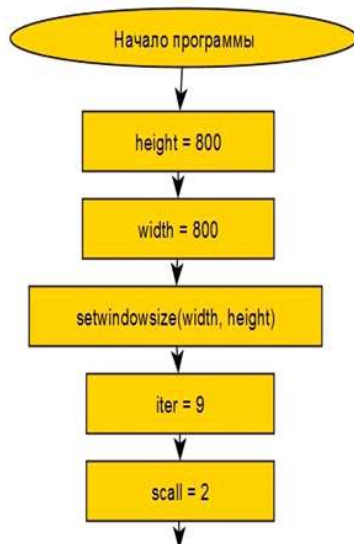


Рис. 3. Алгоритм инициализации и выбора масштаба (1 часть).

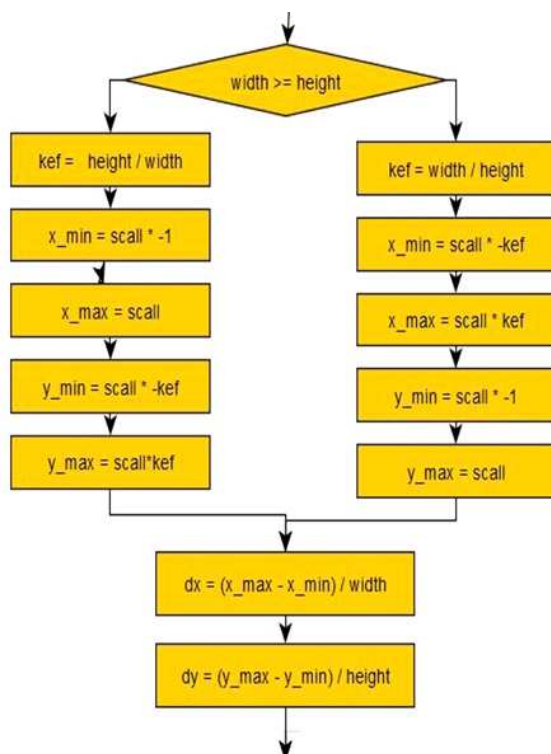


Рис. 4. Алгоритм инициализации и выбора масштаба (2 часть).

На рис. 3, 4 описан алгоритм инициализации и выбора масштаба. С помощью данной части программы происходит выбор шага для прохода по экрану компьютера, имитирующего комплексную плоскость.

На рис. 5 изображен алгоритм вычисления итераций многочлена Чебышева.

На рис. 6 указан алгоритм построения множеств Жюлиа многочленов Чебышева. Поясним действие алгоритма. Пусть мы имеем $f(z)$ — полином Чебышева. Находим его n -ю итерацию $f^{(n)}(z)$ (обычно достаточно взять $n = 20$).

На комплексной плоскости (ее имитирует монитор компьютера) точка z отмечается черным цветом, если ее орбита $z \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots \rightarrow z_n \rightarrow \dots$ ограничена (для ограниченности орбиты достаточно

(см. [6–8]), чтобы было $|z| \leq 4$). В противном случае данная точка пропускается и исследуется следующая точка комплексной плоскости. Данный процесс закончится тогда, когда будет исследована орбита каждой точки видимой части экрана компьютера. В результате множество Жюлиа закрасится в черный цвет и будет отрезком $[-2; 2]$.

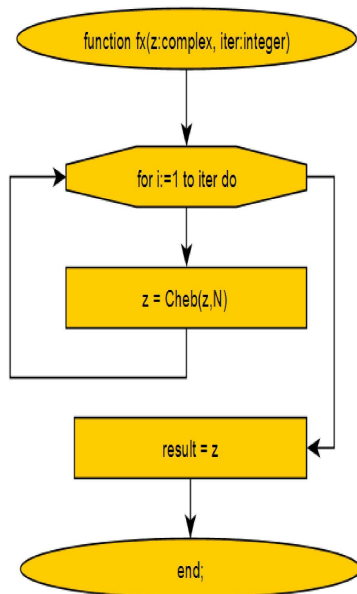


Рис. 5. Алгоритм вычисления итераций многочлена Чебышева.

Итак, с помощью алгоритма, изображенного на рис. 6, происходит вычисление орбиты точки, ее анализ и вывод на экран исходной точки в зависимости от значения модуля соответствующей итерации z_n многочлена Чебышева.

В заключение отметим, что разработанная методика изучения множеств Жюлиа от полиномов Чебышева дает возможность обучаемым познать интеграцию математических методов с информационными и коммуникационными технологиями, что позитивно влияет на их мотивацию к изучению математики и информатики, развивает креативность и исследовательские компетенции.

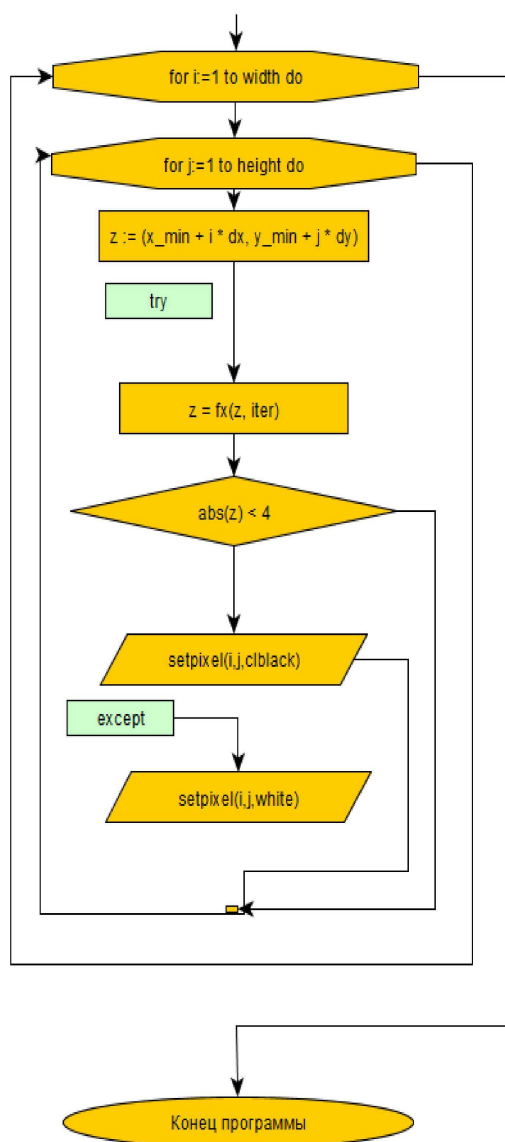


Рис. 6. Алгоритм построения множества Жюлиа для многочлена Чебышева.

Литература

1. Морозов А. Д. Введение в теорию фракталов. — М.–Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002. — 162 с.
2. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Пер. с англ., под ред. Т. Э. Крэнкеля. — М.: Постмаркет, 2000. — 352 с.
3. Божокин С. В., Паршин Д. А. Фракталы и мультифракталы. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. — 128 с.
4. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. — 528 с.
5. Гринченко В. Т., Мацыпура В. Т., Снарский А. А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. — М.: Изд-во ЛКИ, 2007. — 264 с.
6. Смирнов Е. И., Соловьев А. Ф., Буракова Г. Ю. Дидактический модуль по математическому анализу: теория и практика: Уч. пособие. — Ярославль: Изд-во Ярослав. гос. пед. ун-та, 2002. — 181 с.
7. Секованов В. С. Элементы теории фрактальных множеств: Уч. пособие / 5-е изд. — М.: Либроком, 2013. — 241 с.
8. Секованов В. С. О множествах Жюлиа некоторых рациональных функций // Вестн. Костромского гос. ун-та им. Н. А. Некрасова. — 2012. — Т. 18, № 2. — С. 23–28.
9. Бабенко А. С., Секованов В. С. Развитие креативных качеств студентов при изучении метода итераций // Математика в образовании. Сб. статей. Вып. 4 / ред. И. С. Емельянова. — Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2008. — С. 52–54.
10. Секованов В. С., Смирнов Е. И., Бабенко А. С., Селезнева Е. М., Смирнова А. О., Елкин Д. В. Методика визуализации множества Жюлиа с использованием информационных технологий // Ярослав. пед. вестн. — 2016. — № 3. — С. 137–147.

Бабенко Алена Сергеевна
Костромской государственный университет
им. Н. А. Некрасова
РОССИЯ, 156005, Кострома, ул. Дзержинского, 17
E-mail: alenbabenko@yandex.ru

Елкин Дмитрий Владимирович
Костромской государственный университет
им. Н. А. Некрасова
РОССИЯ, 156005, Кострома, ул. Дзержинского, 17
E-mail: dimajolkin@yandex.ru

Пигузов Алексей Александрович
Костромской государственный университет
им. Н. А. Некрасова
РОССИЯ, 156005, Кострома, ул. Дзержинского, 17
E-mail: piguzov@ksu.edu.ru

Секованов Валерий Сергеевич
Костромской государственный университет
им. Н. А. Некрасова
РОССИЯ, 156005, Кострома, ул. Дзержинского, 17
E-mail: sekovanovvs@yandex.ru

Смирнов Евгений Иванович
Ярославский государственный педагогический
университет им. К. Д. Ушинского
РОССИЯ, 150000, Ярославль, ул. Республиканская, 108/1;
Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: e.smirnov@yspu.org

THE FEATURES OF ALGORITHM'S SYNERGY
AND STUDING OF JULIA SETS
FOR CHEBYSHEV'S POLYNOMIALS

Babenko A. S., Elkin D. V., Piguzov A. A.,
Sekovanov V. S., Smirnov E. I.

In this paper the Julia set of Chebyshev's polynomial is considered. It is proved by using of mathematical modeling that Julia set of Chebyshev's polynolial $f(z) = z^5 - 5z^3 + 5z$ is a segment $[-2; 2]$. An algorithm of Julia set constructing for Chebyshev's polynomials is developed. The methodical techniques of Julia set learning for Chebyshev's polynomials are provided.

Key words: algorithm, Julia set, Chebyshev's polynomials, fixed and periodic points, orbit of a point.

РЕАЛИЗАЦИЯ СТУДЕНТАМИ ВУЗОВ
ДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЕТНЫХ ПРОЕКТОВ
В РАМКАХ ДИСТАНЦИОННОГО
ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ¹

В. В. Богун

В предлагаемой статье рассмотрены вопросы использования различных видов информационно-коммуникационных технологий при изучении студентами дисциплин естественнонаучного цикла. Представлены основные особенности реализации образовательного процесса с применением систем дистанционного обучения с точки зрения организации самостоятельной деятельности студентов. Рассмотрены методические аспекты использования разработанной автором дистанционной системы динамических расчетных проектов, с помощью которой возможно построение учебного процесса с реализацией студентами расчетных проектов и работ в дистанционном формате.

Ключевые слова: информационно-коммуникационные технологии, дисциплины естественнонаучного цикла, системы дистанционного обучения, дистанционная система динамических расчетных проектов.

Основной целью обучения студентов вузов является получение учащимися взаимосвязанного комплекса знаний, умений и навыков, позволяющего успешно реализовывать будущую профессиональную деятельность с точки зрения решения необходимых задач. Проблема эффективной учебной деятельности студентов неразрывно связана с формированием у обучаемых мотивов обучения, которые являются источником активности и побудителем направленной деятельности, при этом в процессе обучения у студентов общие мотивы личности трансформируются в профессионально-ориентированные. При решении студентами в процессе обучения различных прикладных задач у обучающихся формируются навыки практического мышления,

¹Работа выполнена в рамках гранта РФФИ «Синергия математического образования в школе и вузе на основе адаптации современных достижений в науке», проект № 16-18-10304.

поскольку решение конкретной практической задачи осуществляется с применением определенного расчетного алгоритма за ограниченный промежуток времени на основе анализа и синтеза полученных ранее теоретических знаний.

Использование различных видов информационно-коммуникационных технологий в вузах при реализации процесса обучения студентов дисциплинам естественнонаучного цикла способствует успешному решению учащимися учебных, прикладных, профессионально-ориентированных и научно-исследовательских задач в силу автоматизации выполнения сложных расчетных алгоритмов и наглядного представления получаемых результатов вычислений, что приводит к повышению интереса и мотивации учащихся к учебному процессу, формированию теоретического и практического мышления обучающихся [1–3].

Наиболее популярными являются дистанционные учебные технологии, которые позволяют обеспечить доступ к образовательным ресурсам каждому студенту вне зависимости от его пространственного и временного положения, при этом значительно повышается качество получаемых учащимися теоретических знаний, практических умений и навыков.

Имеющиеся на сегодняшний день системы дистанционного обучения позволяют реализовывать самостоятельную работу студентов по четырем основным составляющим: ознакомление учащихся с теоретическим материалом, представленным в виде электронного учебника; тестирование студентов по вопросам, заранее составленным вручную преподавателем, и соответствующим вариантам ответов к каждому из них; общение в рамках форумов или гостевых книг; возможность экспорта-импорта файлов документов пользователя.

При изучении дисциплин естественнонаучного цикла для проведения промежуточного и итогового контроля знаний, умений и навыков обучающихся целесообразно применять комплексные расчетные проекты, в рамках которых учащиеся выполняют сложные расчетные алгоритмы с целью получения и наглядного представления промежуточных и итоговых результатов вычислений на основе полученных от преподавателя вариантов значений исходных данных.

Использование расчетных проектов в рамках традиционной системы обучения (выполнение студентами домашних работ, курсовых работ и проектов) без использования информационно-коммуникационных технологий характеризуется следующими недостатками.

1. Трудоемкость составления преподавателем необходимого количества различных вариантов значений исходных данных и соответствующих расчетных выкладок.

2. Трудоемкость проверки преподавателем правильности реализации студентами расчетных проектов в силу комплексной реализации множества арифметических и логических операций.

3. Трудоемкость реализации преподавателем мониторинга дистанционных учебных проектов студентов.

4. Высокая степень потери и малая достоверность информации по мониторингу дистанционных учебных проектов студентов, сложность формирования соответствующих отчетов.

5. Неуверенность студентов в правильности решения отдельных взаимосвязанных задач проекта с точки зрения проверки корректности найденных значений необходимых расчетных параметров.

Применяемые в рамках реализации образовательного процесса в вузах дистанционные системы обучения не могут обеспечить выполнение учащимися расчетных проектов, что является их существенным недостатком при реализации учебной деятельности студентов в рамках изучения дисциплин естественнонаучного цикла.

Разработанная автором и успешно применяемая в учебном процессе дистанционная система динамических расчетных проектов в отличие от имеющихся на рынке систем дистанционного обучения предлагает не статические тестовые системы для проверки знаний, умений и навыков учащихся, которые базируются на полностью прописанных вручную компонентах тестовых заданий, а полноценные возможности для реализации динамических расчетных проектов.

Информационная система базируется на использовании принципа «программа в программе», суть которого заключается в реализации системы динамических расчетных проектов, необходимые составляющие которых представляются в виде самостоятельных программных модулей с применением различных расчетных алгоритмов, которые обрабатываются непосредственно основной оболочкой информационной системы.

Преимущество данной информационной системы заключается в возможности организации дистанционной самостоятельной работы студентов с точки зрения реализации расчетных проектов, суть которых состоит в автоматической генерации обучаемыми значений исходных данных, выполнении студентами необходимых расчетных алгоритмов, указании учащимися значений результатов с возмож-

ностью их многократной проверки информационной системой и редактирования, а также возможностями полноценного автоматизированного мониторинга выполняемых студентами расчетных проектов преподавателем и учащимися [3–5].

Порядок работы студента в информационной системе состоит из следующих этапов.

1. Студент на основании исходного кода программного модуля динамического расчетного проекта получает задание, которое может быть одинаковым для всех студентов, но значения исходных данных формируются с использованием генератора случайных чисел при соблюдении определенных условий, что позволяет сделать задание индивидуальным (рис. 1).

2. Программное обеспечение информационной системы в автоматическом режиме производит необходимые расчеты, получает правильные ответы для промежуточных и итоговых данных и сохраняет их в базе данных.

3. Обучающийся самостоятельно производит расчеты согласно сформированному заданию расчетного проекта и указывает значения полученных промежуточных и итоговых результатов в соответствующие текстовые поля (рис. 2).

4. Информационная система проверяет соответствие рассчитанных студентом значений результатов с данными, которые были автоматически получены системой (рис. 3). Если ответ студента неправильный, то студент может неоднократно исправлять и проверять значения рассчитанных значений результатов расчетов (рис. 4, 5) с целью выполнения динамического расчетного проекта целиком.

Исходные данные для работы:
<p>Коэффициенты числовой последовательности: Коэффициент числовой последовательности: $a_0 = -3$ Коэффициент числовой последовательности: $a_1 = -4$ Коэффициент числовой последовательности: $a_2 = 7$ Коэффициент числовой последовательности: $b_0 = 10$ Коэффициент числовой последовательности: $b_1 = -5$ Коэффициент числовой последовательности: $b_2 = 8$ Числовая последовательность: $x_n = x(n) = (a_2 \cdot n^2 + a_1 \cdot n + a_0) / (b_2 \cdot n^2 + b_1 \cdot n + b_0) = (7 \cdot n^2 - 4 \cdot n - 3) / (8 \cdot n^2 - 5 \cdot n + 10)$</p> <p>Параметры поиска: Точность вычислений: $\text{eps} = 0.08$ Начальный номер: $n_{\text{AO}} = 6$ Конечный номер: $n_{\text{BO}} = 4000$ Номер члена последовательности Фибоначчи: $K_F = 18$</p>

Рис. 1. Формирование системой значений исходных данных.

Реализация расчетов:
Нахождение значений параметров расчетов по методу золотой пропорции:
Шаг 0:
Номер числовой последовательности: $n_{AO}^{GP} = 6$
Номер числовой последовательности: $n_{BO}^{GP} = 4000$
Номер числовой последовательности: $n_{CO}^{GP} = 1500$
Номер числовой последовательности: $n_{DO}^{GP} = 3000$
Член числовой последовательности $x_n = x(n) \cdot x(n_{CO}^{GP}) =$
Член числовой последовательности $x_n = x(n) \cdot x(n_{DO}^{GP}) =$
Функция $y = f(n) \cdot f(n_{CO}^{GP}) =$
Функция $y = f(n) \cdot f(n_{DO}^{GP}) =$
Шаг 1:

Рис. 2. Указание студентом значений результатов.

Реализация расчетов:
Нахождение значений параметров расчетов по методу золотой пропорции:
Шаг 0:
Номер числовой последовательности: $n_{AO}^{GP} = 6$
Номер числовой последовательности: $n_{BO}^{GP} = 4000$
Номер числовой последовательности: $n_{CO}^{GP} = 1500$
Номер числовой последовательности: $n_{DO}^{GP} = 3000$
Член числовой последовательности $x_n = x(n) \cdot x(n_{CO}^{GP}) =$
Член числовой последовательности $x_n = x(n) \cdot x(n_{DO}^{GP}) =$
Функция $y = f(n) \cdot f(n_{CO}^{GP}) =$
Функция $y = f(n) \cdot f(n_{DO}^{GP}) =$
Шаг 1:

Рис. 3. Проверка системой значений результатов.

Реализация расчетов:
Нахождение значений параметров расчетов по методу золотой пропорции:
Шаг 0:
Номер числовой последовательности: $n_{AO}^{GP} = 6$
Номер числовой последовательности: $n_{BO}^{GP} = 4000$
Номер числовой последовательности: $n_{CO}^{GP} = 1532$
Номер числовой последовательности: $n_{DO}^{GP} = 2474$
Член числовой последовательности $x_n = x(n) \cdot x(n_{CO}^{GP}) =$
Член числовой последовательности $x_n = x(n) \cdot x(n_{DO}^{GP}) =$
Функция $y = f(n) \cdot f(n_{CO}^{GP}) =$
Функция $y = f(n) \cdot f(n_{DO}^{GP}) =$
Шаг 1:

Рис. 4. Изменение студентом неправильных значений результатов.

Реализация расчетов:
<p>Нахождение значений параметров расчетов по методу золотой пропорции:</p> <p>Шаг 0:</p> <p>Номер числовой последовательности: $n_{A0}^{GP} = 6$</p> <p>Номер числовой последовательности: $n_{B0}^{GP} = 4000$</p> <p>Номер числовой последовательности: $n_{C0}^{GP} = 1532$</p> <p>Номер числовой последовательности: $n_{D0}^{GP} = 2474$</p> <p>Член числовой последовательности $x_n = x(n): x(n_{C0}^{GP}) =$ <input type="text"/></p> <p>Член числовой последовательности $x_n = x(n): x(n_{D0}^{GP}) =$ <input type="text"/></p> <p>Функция $y = f(n): f(n_{C0}^{GP}) =$ <input type="text"/></p> <p>Функция $y = f(n): f(n_{D0}^{GP}) =$ <input type="text"/></p> <p>Шаг 1:</p>

Рис. 5. Проверка системой измененных значений результатов.

В настоящее время информационная система успешно применяется автором при обучении студентов по дисциплинам «Математика» и «Высшая математика» по различным направлениям бакалавриата, при этом студенты выполняют следующие динамические расчетные проекты: «Арифметические операции над матрицами», «Решение систем линейных алгебраических уравнений», «Нахождение параметров треугольника на плоскости методами аналитической геометрии», «Нахождение пределов числовых последовательностей», «Решение алгебраических и трансцендентных уравнений», «Приближенные вычисления значений определенных интегралов», «Приближенные решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка».

Дистанционная система динамических расчетных проектов позволит обеспечить доступ к качественному образованию студентам вузов из удаленных районов и людям с ограниченными возможностями здоровья, а также поможет вузу разнообразить учебные занятия и домашние задания благодаря выполнению учащимися реальных расчетных проектов на дистанционном уровне, в рамках которых необходимо реализовывать сложные расчетные алгоритмы, повысить интерес обучаемых к учебному процессу, способствовать развитию их теоретического и практического мышления.

Литература

1. Богун В. В., Смирнов Е. И., Кузнецов А. А. Проблемы и перспективы реализации единой среды дистанционного обучения студентов педагогических вузов // Информатика и образование. — 2010. — № 7. — С. 74–82.

2. Смирнов Е. И., Соловьев А. Ф., Буракова Г. Ю. Дидактический модуль по математическому анализу: теория и практика: Учеб. пособие. — Ярославль: Изд-во Ярослав. гос. пед. ун-та, 2002. — 181 с.
3. Богун В. В. Применение дистанционных учебных проектов при обучении математике // Высш. образование в России. — 2013. — № 5. — С. 114–119.
4. Богун В. В. Информационные особенности динамической системы мониторинга дистанционных учебных проектов // Ярослав. пед. вестн. — 2011. — Т. 2, № 1. — С. 185–193.
5. Богун В. В. Дистанционные динамические расчетные проекты по исследованию функций вещественного переменного: Учеб. пособие. — Ярославль: Канцлер, 2014. — 84 с.

Богун Виталий Викторович
Ярославский государственный педагогический
университет им. К. Д. Ушинского
РОССИЯ, 150000, Ярославль, ул. Республиканская, 108/1
E-mail: vvvital@mail.ru

DEVELOPMENT OF DYNAMIC SETTLEMENT STUDENT'S PROJECTS IN DISTANCE LEARNING OF MATHEMATICS

Bogun V. V.

In this paper the questions of ICT using in science learning in higher education are considered. The main features of distance learning using dynamic settlement projects in mathematics are presented. Methodical techniques of student's activity in educational process are considered.

Key words: information and communication technologies, science subjects, learning, remote system of dynamic settlement projects.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ПРОБЛЕМ КАК ВАЖНЕЙШЕЕ НАПРАВЛЕНИЕ ИНТЕГРАТИВНЫХ КУРСОВ¹

С. Н. Дворяткина, С. А. Розанова

В статье рассматривается вопрос о целесообразности использования в учебном процессе высшей школы интегративных курсов, которые способствуют взаимообогащающему синтезу знаний при решении комплексных междисциплинарных проблем. Проводится анализ понятия междисциплинарности различными авторами, как отечественными, так и зарубежными. Предложен возможный механизм реализации принципа междисциплинарности через создание интегративных курсов, в структуре которых ведущее место отводится методу математического моделирования. Обосновывается важность изучения данного метода на примере решения профессиональных научно-технических задач с привлечением знаний из смежных областей.

Ключевые слова: междисциплинарность, интегративные курсы, метод математического моделирования, профессиональные и прикладные задачи.

Нравственный, интеллектуальный, духовно-культурный, научно-технический и экономический потенциал общества непосредственно зависит от уровня развития образовательной сферы. Для современной системы образования все более актуальна идея генерации знания в целях личного и профессионального развития, овладения широко-профильной квалификацией и соответствия предложению и спросу на высококвалифицированные кадры. Такая образовательная стратегия отражает природу интегративного знания, способствует конструктивному междисциплинарному диалогу. Одним из путей реализации развития образования является внедрение интегративных курсов и междисциплинарных программ, которые способствуют взаимообогащающему синтезу результатов разных научных дисциплин при решении комплексных профессиональных проблем, конструктивному диалогу представителей разных научных областей.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 16-18-10304.

В исследуемом аспекте взаимосвязи процессов дифференциации и интеграции междисциплинарность имеет биполярный характер. С одной стороны, она углубляет дифференциацию, ведет к образованию новых областей исследования, новых дисциплин «на стыке» наук, например, биофизика, биоэнергетика, квантовая обработка информации и др. С другой стороны, это ключевой фактор интеграции современной науки, гид в модернизации ее методов.

Различными учеными даются собственные формулировки понятия междисциплинарности. Согласно Г. Бергерау данный термин означает взаимодействие между двумя или несколькими различными дисциплинами, которое может варьироваться от простого обмена идеями до взаимной интеграции целых концепций, процедур, терминологии, организации исследовательской и образовательной деятельности в некоторой широкой области [1]. Аналогичное понимание междисциплинарности мы находим и у авторов Д. Дэвидсона, К. Миллера и др., согласно которому она предполагает объединение двух и более академических дисциплин, разрабатываемых предметных областей или объединение двух или более направлений подготовки, технологий и др. [2]. Х. Якобс под междисциплинарным обучением понимает вид знания или курс обучения, который преднамеренно использует методологию и язык более одной дисциплины для проверки центральной темы, события, тематики или опыта [3].

Реализация междисциплинарности в образовательном процессе позволяет расширить познавательные горизонты отдельно взятой дисциплины и при этом не потерять ее качественные особенности. Тем самым мы рассматриваем междисциплинарность как дидактический принцип, который, обладая свойством дуализма, является и средством интеграции предметных знаний в единую результативную систему, и одновременно выполняет дифференцирующую функцию для каждой отдельной дисциплины.

Под *интегративными курсами* мы понимаем учебные дисциплины, содержание которых определяется взаимосвязью нескольких базовых научных дисциплин и предметных областей, гибкой логикой изложения, высокой степенью свободы в выборе форм и методов обучения, реализацией междисциплинарных структурных и содержательных связей. Интегративные курсы чаще всего входят в вариативную часть учебного плана бакалавриата старших курсов или магистерской программы. Следует отметить, интегративные курсы создаются в ситуации, когда существуют сложные или широкомас-

штабные проблемы, которые невозможно решить в рамках одной дисциплины. Рассматриваемые курсы ориентированы на изучение некоторого явления с разных сторон несколькими научными дисциплинами и разными методами.

Структура интегративных курсов включает следующие компоненты: целевой, содержательный и оценочный.

Целевыми установками интегративных курсов являются: закрепление сформированных в рамках изучения предшествующих дисциплин знаний, умений и навыков в процессе учебной и исследовательской деятельности студентов по решению профессионально значимых проблем; упорядочивание и систематизация содержания изученных дисциплин, создание широкого профессионального кругозора. Интегративные курсы базируются на изученных ранее базовых дисциплинах учебного плана, учебной практики, а также использовании обобщения отечественной практики и зарубежного опыта изучаемой области знаний. Следовательно, интегративные курсы способствуют взаимообогащающему синтезу научных дисциплин, интеграции мыслительной и практической деятельности будущих специалистов и более эффективному их вхождению в профессиональную деятельность.

Примерное содержание интегративного курса должно включать учебный материал из разных областей знания, который необходим для формирования профессиональных компетенций. При содержательной интеграции учебного материала из разных учебных дисциплин необходимо учитывать: комплексность подхода к профессиональным проблемам в рамках курса; системность структуры содержательных единиц, исключение дублирования, обеспечение дополнительности и внутренней структурно-функциональной связанности материала.

Оценочная часть структуры интегративных курсов содержит итоговые междисциплинарные проекты, описание порядка их выполнения, критерии и рекомендации по коррекции полученного результата.

Значительный потенциал для реализации междисциплинарности имеется у дисциплин математического цикла. Обучение математике способствует пониманию математики как важнейшей части культуры человеческого общества, устанавливающей интеграцию естественнонаучного и гуманитарного знания. Однако опыт математического образования в любой предметной области, кроме собственно

математики, свидетельствует, что в таком «дуализме» скрывается определенная опасность, которая состоит в том, что затруднительно научиться применять математику в конкретных профессиональных исследованиях после изучения ее общепринятого стандартного теоретического фундамента. Необходим определенный «интерфейс» между общетеоретическими математическими знаниями и конкретными профессиональными инструментальными навыками.

Подобным «интерфейсом» и в то же время универсальным инструментом является метод математического моделирования для решения профессиональных и прикладных проблем. При абстракции реальных процессов и явлений на основе математического аппарата задействуются достаточно неоднородные данные, получаемые из смежных областей знаний. Это приводит к активному формированию у обучающихся исследовательских навыков, системного мышления и расширению границ познания.

Требования относительно точности построения математических моделей определяют уровень заданий в общей градационной шкале развития обучающегося. Чем точнее математическая модель имитирует поведение реальной системы или процесса, тем более приближен уровень к профессиональному. В самом начале шкалы находятся задания, основной целью которых является освоение начальных методов математического моделирования с минимальными требованиями к идентичности конструируемых моделей реальным процессам. Однако уже даже этот начальный уровень требует активного освоения смежных областей знания и, полностью раскрывая потенциал стандартного математического фундамента, не позволяет допустить отрыва математики от реальности. Метод математического моделирования является интеллектуальным ядром современных технологий и выполняет интегративную функцию. Это в полной мере позволяет активизировать междисциплинарные связи с достижением у обучаемых требуемого современным обществом уровня профессионализма.

В связи со сказанным выше, важное место в структуре интегративных курсов отводится решению профессиональных и прикладных задач методом математического моделирования. Включение профессиональных и прикладных задач в структуру интегративного курса обеспечивает его логическую завершенность. Для успешного освоения математического моделирования студентам не требуются новые математические знания, при этом данный метод являет-

ся наиболее эффективным. Замена реального объекта, явления или процесса его *математической моделью* — математическим «образом», состоящим из алгоритмически представленных закономерностей, описывающих на языке формул основные характеристики изучаемого процесса (явления), составляет суть математического моделирования. И это наиболее сложная часть метода.

Решение профессиональных задач методом математического моделирования ведется по трехэтапной схеме. На *первом этапе* (этапе формализации) осуществляется переход от профессиональной задачи, которую предстоит решить, к построению ее математической модели; на *втором этапе* (этапе внутримодельного решения, фаза дедукции) решается математическая задача, сформулированная на первом этапе; на *третьем этапе* (этапе интерпретации математического решения, фаза интерпретации) полученное решение математической задачи переводится на язык исходной профессиональной задачи.

Реализация первого этапа требует от студентов таких умений, как умения выделять существенные факторы, определяющие исследуемое явление, вызывающие погрешность при составлении модели, умения оптимально и корректно выбрать математический аппарат для составления модели. Существенным на втором этапе является деятельность внутри этой модели: умелое планирование процесса решения сформулированной математической задачи, выделение в нем составляющих задачи, умение анализировать и уточнять составленную модель, умение переходить от одной модели к другой и выбирать в каждом конкретном случае наиболее целесообразное и вместе с тем оптимальное решение задачи. На заключительном этапе главное — возвращение к действительности (толкование результатов дедукции и расчетов), т. е. умение грамотно перевести результат решения математической задачи на язык исходной задачи. Важную роль на этом этапе играет владение методами анализа и проверки решения профессиональной задачи, умение распространить найденное решение на решение других подобных задач, оценить степень точности полученных в итоге результатов и выяснить ее влияние на корректность решения задачи.

Важное значение при построении математической модели имеет степень ее сложности. С одной стороны, математическая модель должна быть достаточно сложна, чтобы отражать все существенные свойства изучаемого явления, с другой стороны, достаточно про-

ста, чтобы применять более простые математические методы. Введя классификацию профессиональных и прикладных задач по четырем уровням сложности [4], проиллюстрируем глубину применения математического моделирования на примере обработки сигналов. Рассматриваемые прикладные и профессиональные задачи включены в интегративный курс для студентов, обучающихся по направлениям подготовки «Электроника и нанoeлектроника», «Радиотехника».

1. Первый уровень — профессиональные аналоги классических задач и формул. Цель — сформировать умения воспроизводить по образцу построение математической модели типовой профессиональной задачи. К данному уровню можно отнести следующие примеры. Рассмотрение непрерывных и разрывных сигналов в началах анализа; сигналов на выходе дифференцирующих и интегрирующих цепей в курсе дифференциального и интегрального исчисления; определение вероятности зашумления полезного сигнала в приемнике (при встрече двух сигналов); расчет спектральной плотности и дискретного спектра различных сигналов в разделе рядов Фурье соответственно и др.

Задача 1. Рассчитайте среднюю мощность периодических сигналов, описываемых функциями:

$$\text{а) } x(t) = \begin{cases} 3, & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ -2, & \text{при } \frac{T}{2} \leq t < T; \end{cases}$$

$$\text{б) } x(t) = 3 \cdot |t|, \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}.$$

Задача 2. Дан периодический сигнал, описываемый функцией

$$x(t) = 5 \cos\left(20\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 3 \cos(30\pi t - \pi).$$

Определите период сигнала. Постройте амплитудный и фазовый спектры.

2. Второй уровень — учебные и профессиональные задачи с элементами математического моделирования. Цель — формирование умения в построении математической модели профессиональной задачи средней сложности, ее решение аналитическими и численными методами. Например, приближение периодических сигналов

различной формы частичными суммами тригонометрического ряда Фурье. Ниже дан пример еще одной задачи.

Задача 3. В бесконечном виртуальном пространстве, в котором отсутствуют затухания радиоволн на некотором удалении друг от друга (\gg чем длина волны), располагаются точечный излучатель и точечный приемник радиосигнала. Посредством приемника фиксируется периодический негармонический радиосигнал (рис. 1). Оценить посредством каких двух сигналов был сформирован излучаемый радиосигнал. С помощью любого стандартного математического пакета на ПК убедиться в верности полученных данных.

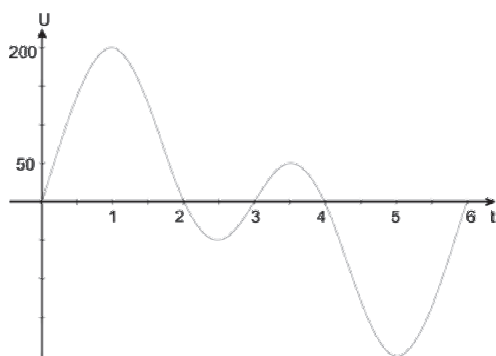


Рис. 1. Периодический негармонический радиосигнал.

3. Третий уровень — учебно-исследовательские профессиональные задачи в виде лабораторной или курсовой работы. Например, сравнение аппроксимаций заданного сигнала разложением его в обобщенный ряд Фурье по различным системам ортогональных функций. Цель — формирование умения в построении математической модели профессиональной задачи повышенной сложности, ее решении, анализе и профессиональной интерпретации результатов.

Задача 4. Приведите определение обобщенного ряда Фурье. Докажите ортогональность указанных ниже функций на соответствующих отрезках. Используя априорную информацию об исходном синусоидальном сигнале

$$S(t) = \begin{cases} \sin(\pi t), & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & -1 \leq t < 0, \end{cases}$$

разложите его по ортогональной системе базисных функций:

- а) с применением тригонометрических функций;
- б) по системам ортогональных полиномов Лежандра и Чебышева;
- в) по системе функций Уолша.

Сравнить точность полученных аппроксимаций.

4. Четвертый уровень — научно-исследовательские профессиональные задачи. Например, исследование помехоустойчивости разнесенного приема сигнала методами ТФКП и случайных процессов. Цель — привлечение способных студентов к участию под руководством преподавателя в научно-исследовательской работе. Еще одна задача такого уровня.

Задача 5. Определить методом математического моделирования оптимальное место установления телевизионной приемной антенны (Дельта H1381AF или ASP8WA) с целью получения максимальной амплитуды входного аналогового сигнала и наиболее качественного изображения (без двоений) в метровом диапазоне при выполнении следующих условий:

- а) принять к рассмотрению местный РТПЦ с его параметрами;
- б) невозможность обеспечения «прямой видимости»;
- в) наличие 2-разового переотражения телевизионного сигнала от соседних домов;
- г) установка приемной антенны исключительно на стене здания, а не на его кровле;
- д) «городской застройке» и погодных условий.

Расположение здания и его этажность уточняются у преподавателя.

Очевидно, чем точнее математическая модель (выше уровень сложности), тем шире область ее применения и тем больший круг задач она позволяет решить. Разнообразие примеров различных сигналов, применяемых при решении профессиональных проблем (радиосигналы при идентификации объектов наблюдения, отклики геодезического зонда при обнаружении полезных ископаемых, определение характеристик залежей, сигналы электрокардиограммы при диагностике заболевания сердца и др.), и необходимость их моделирования дают богатейший материал для введения профессиональных задач различного уровня в интегративные материалы и курсы.

Литература

1. *Berger G.* Opinions and facts // *Interdisciplinary: Problems of Teaching and Research in Univ.* — Paris: OECD, 1972. — P. 23–75.
2. *Davison D. M., Miller K. W., Metheny D. L.* What Does Integration of Science and Mathematics Really Mean? — URL: http://www.project2061.org/publications/designs/dod/dsl_text/Reprints/8_Davison.pdf.
3. *Jacobs H.* *Interdisciplinary Curriculum: Design and Implementation.* — Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development, 1989.
4. *Розанова С. А., Санина Е. И., Кузнецова Т. А.* Дидактические возможности информационных и коммуникационных технологий в обучении математике в вузе // *Вестн. РУДН. Сер. Информатизация образования.* — 2012. — № 3. — С. 93–98.

Дворяткина Светлана Николаевна
Елецкий государственный университет
им. И. А. Бунина
РОССИЯ, 399770, Елец, ул. Коммунаров, 28.1
E-mail: sobdvor@yelets.lipetsk.ru

Розанова Светлана Алексеевна
Московский технологический университет
РОССИЯ, 119454, Москва, пр. Вернадского, 78
E-mail: srozanova@mail.ru

MATHEMATICAL MODELING OF PROFESSIONAL
AND APPLIED PROBLEMS AS THE MOST IMPORTANT
DIRECTION OF INTEGRATIVE COURSES

Dvoryatkina S. N., Rozanova S. A.

In this article the questions of integrative courses using in higher education which promote of knowledge synthesis at the solution of interdisciplinary problems are considered. The possible mechanisms of interdisciplinary principles realization through the creation of integrative courses are offered. The importance of this methods on the example of solution of professional and applied problems with engaging of interfacing areas knowledge is provided.

Key words: interdisciplinarity, integrative courses, method of mathematical model operation, professional and applied tasks.

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ: РЕАЛИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В СОДЕРЖАНИИ ШКОЛЬНЫХ УЧЕБНИКОВ МАТЕМАТИКИ

И. Е. Малова

Предложена методика анализа школьных учебников с позиций реализации в них как деятельностного подхода (ДП), личностно ориентированного обучения (ЛОО), так и различных образовательных технологий на примере текстовых задач. Методика учитывает: назначение ДП (ЛОО); схему анализа текста учебника с позиций реализации ДП (ЛОО); цели включения текстовых задач в школьные учебники; методические основы достижения этих целей; особенности использования выбранной образовательной технологии.

Ключевые слова: образовательная технология, деятельностный подход, личностно ориентированное обучение, текстовая задача, содержание школьных учебников математики.

Реализация образовательных технологий в обучении математике — многоаспектное явление, предусматривающее ответы на ряд вопросов: какие образовательные технологии разработаны; есть ли общая методологическая основа (основы) для различных образовательных технологий; какую роль играет использованная образовательная технология; каковы признаки реализации выбранной технологии; каков состав деятельности учителя (учащихся) при реализации соответствующей образовательной технологии и др. Каждый аспект требует отдельного описания.

Представление различных видов технологий осуществлено Г. К. Селевко в работах [11, 12] и др. В основном автором используется следующая схема описания технологий: целевые ориентации; концептуальные основы; организационно-методические особенности; предтечи, разновидности, последователи; рекомендуемая литература.

На современном этапе развития образования методологическими основами образовательных технологий, согласно ФГОС, должны быть: 1) деятельностный подход; 2) личностно ориентированное обучение; 3) компетентностный подход.

Деятельностный подход в обучении «отвечает» за обеспечение самостоятельной успешности учащихся в конкретных видах деятельности.

Можно выделить несколько уровней умений, которые соответствуют уровням деятельности: частнопредметный (например, уметь складывать десятичные дроби); общепредметный (например, уметь решать текстовые задачи); метапредметный характер (например, уметь осуществлять смысловое чтение).

В связи с конкретным видом деятельности важно ответить, по крайней мере, на вопросы:

- 1) какова цель деятельности (цель — это предполагаемый результат);
- 2) какова ориентировочная основа этой деятельности (ООД) (ООД — это обобщенный способ деятельности, отвечающий за управление ею);
- 3) каков состав действий, каковы особенности их реализации.

Таким образом, анализ школьных учебников математики с позиции деятельностного подхода предполагает ответы на вопросы:

- 1) какое математическое содержание предложено, каковы цели процесса работы учащихся с этим содержанием и др.;
- 2) каковы деятельностные составляющие процесса работы с этим содержанием: этапы; цели этапов; виды деятельности на этапах, их ориентировочные основы; состав действий учащихся;
- 3) как деятельностные составляющие процесса работы с математическим содержанием представлены в учебнике.

Личностно ориентированное обучение (ЛОО) «отвечает» за обеспечение активной позиции учащихся в процессе обучения, самообучения и саморазвития.

ЛОО предполагает, что главной целью обучения является обогащение субъектного опыта учащихся средствами математической темы (учебного предмета), и это «приращение» субъектного опыта осознается учащимися.

В связи с изучаемой темой важно знать ответы на следующие вопросы:

- 1) какой субъектный опыт учащихся может быть сформирован в данной теме;
- 2) как обеспечить активную позицию учащихся в процессе освоения данной темы;

3) какие итоговые вопросы полезно задать учащимся, чтобы ответы на них в наибольшей степени отражали «приращение» их опыта.

Таким образом, анализ школьных учебников математики с позиции реализации ЛОО предполагает ответы на вопросы:

1) каковы потенциальные возможности математического содержания и процесса работы с ним для обогащения субъектного опыта учащихся;

2) каковы личностные составляющие процесса работы с этим содержанием: состав предметного (метапредметного) опыта; приемы активизации познавательной (рефлексивной) деятельности учащихся и др.;

3) как личностные составляющие процесса работы с математическим содержанием реализованы в учебнике.

Если вопросы реализации деятельностного подхода и личностно ориентированного обучения имеют научно обоснованные технологические рекомендации, то вопросы реализации компетентностного подхода еще требуют исследования. В настоящее время можно считать, что достижение принципов образования XXI века, сформулированных ЮНЕСКО (уметь «познавать, делать, жить, жить вместе»), обеспечивает реализацию компетентностного подхода.

На примере текстовых задач с позиций деятельностного подхода и личностно ориентированного обучения можно продемонстрировать реализацию в современных учебниках математики образовательных технологий: задачные; проблемного обучения; диалоговые; укрупнения дидактических единиц; игровые; проектного обучения и др.

Текстовые задачи в школьных учебниках математики по месту их представления имеют три назначения:

1) используются как средство изучения нового материала;

2) являются объектом изучения;

3) используются для закрепления изученного.

Когда текстовые задачи используются как средство изучения нового, то можно говорить о реализации задачных технологий. Новым материалом может выступать: новое понятие; новый алгоритм; блок теории и др.

Рассмотрим пример использования задачных технологий при введении определения наибольшего общего делителя двух чисел. Ответим на вопросы:

1) какая задача используется;

2) каковы деятельностные и личностные составляющие процесса

введения определения на основе текстовой задачи, и как они реализованы в учебнике;

3) какие иные образовательные технологии можно использовать при введении определения на основе текстовой задачи.

При введении определения наименьшего общего делителя двух чисел в учебниках [1, 4] используется задача о наибольшем количестве одинаковых подарков из предметов двух видов, в учебнике [2] — о наибольшем числе одинаковых команд из заданного числа девочек, мальчиков.

Введение определения на основе текстовой задачи предполагает следующие виды деятельности: 1) решение задачи; 2) выделение существенных признаков нового понятия на основе решения задачи; 3) формулирование определения.

В данном случае ориентировочными основами решения задачи являются этапы работы над задачей: анализ условия; поиск способа решения; оформление решения; подведение итогов работы над задачей.

В рассмотренных учебниках этап анализа условия задачи отсутствует. Для цели введения определения этап анализа условия можно провести устно. Однако для обеспечения самостоятельной успешности учащихся при решении текстовых задач с использованием наибольшего общего делителя составленная краткая запись условия задачи может служить признаком распознавания таких задач.

Поиск способа решения задачи в учебнике [2] включает следующие действия учащихся:

1) переформулирование условия «девочек (мальчиков) во всех командах должно быть поровну» на вывод, что число всех девочек (мальчиков) должно делиться нацело на число команд;

2) конструирование вывода, что число команд должно быть общим делителем заданных чисел 18 и 24;

3) составление плана решения задачи: а) записать все натуральные делители для числа 18 и для числа 24; б) выбрать из обоих списков общие числа; в) ответить на вопрос задачи.

В учебнике [4] условие текстовой задачи о составлении одинаковых подарков из 28 коробок гуаши и 42 кистей не имеет главного вопроса (о наибольшем количестве одинаковых подарков не спрашивается). Учащимся предложено: а) ответить на вопросы: «Могли ли составить 7 одинаковых наборов; 10 одинаковых наборов?»; б) вы-

полнить задание: «Найти возможные варианты наборов, заполнив предложенную таблицу»; в) ответить на вопрос: «Может ли число наборов быть больше 14?». Такой подход предполагает следующие действия учащихся: 1) обосновать, что 7 одинаковых подарков можно сделать, поскольку 28 и 42 делятся на 7, а число 10 этим свойством не обладает; 2) из заданных чисел от 1 до 14 выбрать те, которые являются делителями и 28, и 42; 3) обосновать, что больше 14 одинаковых подарков сделать нельзя, поскольку следующим числом, на которое делится 28, является число 28, но 42 на 28 не делится.

Оформление решения в учебнике [1] включает введение термина «наибольший общий делитель»; в учебнике [2] введение термина отнесено к этапу подведения итогов, что в большей степени способствует соблюдению принципа целеполагания; в учебнике [4] оформление решения ограничивается заполнением таблицы.

Этап подведения итогов предполагает: 1) введение термина «наибольший общий делитель» и выделение существенных признаков определения (активизировать познавательную деятельность учащихся может вопрос: «Какими свойствами обладает найденное число подарков (команд) для заданных чисел?»); 2) формулирование определения (может помочь вопрос: «Какое число назвали бы наибольшим общим делителем двух данных натуральных чисел?» с последующим сравнением формулировки с текстом учебника); 3) составление алгоритма нахождения НОД двух чисел (может помочь вопрос: «Каков первый (следующий) шаг нахождения НОД двух чисел?»); 4) выделение признаков распознавания задач, в которых требуется находить НОД (может помочь вопрос: «Какие ключевые слова в тексте задачи подскажут нам, что для ее решения нужно находить НОД двух чисел?»), и конструирование способа их решения (может помочь вопрос: «Как будем решать такие задачи?»).

По оформлению решения задачи в учебниках [1, 2] можно составить такой алгоритм нахождения НОД: 1) выписать все делители каждого из заданных чисел; 2) выделить общие делители двух чисел; 3) определить наибольший из общих делителей. По учебнику [4] можно составить такой алгоритм нахождения НОД: 1) определить, является ли одно из данных чисел делителем другого; 2) если «нет», то найти наибольший делитель меньшего из заданных чисел, отличный от самого числа; 3) определить общие делители данных чисел, перебирая все числа от 1 до найденного числа; 4) указать наибольший из общих делителей.

Таким образом, зная цель, этапы деятельности и действия учащихся на каждом этапе использования задачных технологий при введении нового определения, можно обеспечить успешность изучения нового, обогатить опыт учащихся не только новым математическим знанием, но и приемами: конструирования определения на основе выделения существенных свойств полученного в задаче числа; составления алгоритма на основе анализа решения задачи; переформулирования требования задачи на математический язык; выделения признаков распознавания нового вида задач; обобщения решения конкретной задачи для получения способа решения задач рассматриваемого типа и др.

Организовать деятельность учащихся при использовании задачных технологий можно в различных вариантах.

В представленном тексте описания возможной организации работы учащихся с задачей активно задействованы диалоговые технологии.

Возможен вариант использования диалоговых технологий при организации работы учащихся с текстом учебника, когда каждый абзац, каждая мысль подвергаются анализу. Возможны вопросы учителя: «О чем идет речь?», «Что утверждают авторы?», «Почему можно сделать этот вывод?», «Какие слова выделены в тексте и почему?» и др.

Возможен прием, когда учащимся предлагается составить вопросы, на которые в тексте есть ответы.

При использовании текста учебника [4] можно организовать исследовательскую или проектную деятельность учащихся, дополнив текст задания учебника целевыми установками: составить свою таблицу для исследования возможных вариантов одинаковых подарков из другого числа коробок гуаши и другого числа кистей; определить наименьшее и наибольшее количество таких подарков; составить алгоритм нахождения наибольшего количества одинаковых подарков из любого числа коробок гуаши (m) и любого числа кистей (n).

Рассмотрим использование текстовых задач в качестве объекта изучения. Можно выделить три цели изучения: 1) установить связь между зависимостью величин и операциями с числами; 2) изучить новый вид задач; 3) изучить новый метод решения.

Установление связи между зависимостью величин и операций с числами предполагает следующие виды деятельности: 1) выделение признаков распознавания использования операций: сложение

и вычитание, умножение и деление; 2) выбор операции: сложение или вычитание; умножение или деление; 3) выполнение выбранной операции.

Ориентировочной основой для выполнения первого вида деятельности являются ключевые слова для ситуаций сложения и вычитания, умножения и деления. Ориентировочной основой для второго вида деятельности служит характер вопроса задачи (например, находим большую или меньшую величину). Ориентировочной основой для третьего вида деятельности является алгоритм выполнения соответствующей операции с заданными числами.

В учебнике [6] признаки распознавания использования операций в текстовой задаче выделены в тексте. Так, в пункте «Решение текстовых задач с помощью сложения и вычитания» сказано: «С помощью сложения и вычитания решают задачи, в которых требуется найти число, большее или меньшее данного на несколько единиц, ответить на вопросы: «на сколько больше?», «на сколько меньше?», «сколько всего?», «сколько осталось?» и т. п.».

В [9] используются комплексные задания, где в рамках одного номера собраны задачи на разные случаи применения операции, или в списке задач требуется выделить те, которые решаются с использованием заданной операции и др. Такой подход использования комплексных заданий соответствует реализации технологии укрупненных дидактических единиц.

Другим примером реализации технологии укрупнения дидактических единиц может служить представление задач на отыскание части от целого и целого по его части в учебнике 5 класса [3]:

- слева представлена задача, в которой требуется найти, сколько гектаров вспахала бригада за день, справа — какова площадь поля;
- предложен список вопросов: какая величина принята за целое в каждой задаче; в какой из задач эта величина известна, а в какой — нет; в какой из задач требуется найти часть от целого, а в какой — целое по ее части; можно ли утверждать, что это взаимно обратные задачи; как найти величину, которая приходится на одну часть (долю), в первом случае и как — во втором;
- учащимся предложено сравнить свои ответы на вопросы и свои решения задач с текстом учебника;
- слева представлено решение первой задачи, справа — второй.

Отметим, что в учебнике 6 класса [4] выделение целого и определение того, известно это целое или его требуется найти с последую-

щим выводом о типе задачи, указано первым действием в оформлении решения.

Таким образом, изучение некоторого типа текстовых задач предполагает следующие виды деятельности: 1) выделение признаков распознавания задач данного вида; 2) раскрытие способа решения задач данного вида; 3) реализация способа в конкретной ситуации.

Укажем другие приемы реализации деятельностного подхода, представленные в учебниках при изучении отдельных видов задач: 1) выделение видов задач в заголовках параграфов или в блоке задачного материала; 2) прием визуализации способа решения задачи на отрезках; 3) использование названия приема (например, прием уравнивания); 4) классификация задач по видам и др.

Рассмотрим изучение нового метода решения текстовых задач — *метода уравнений*.

В учебниках [7, 8] сначала формулируется способ решения, а затем иллюстрируется его применение. При этом способ решения формулируется следующим образом: обозначить неизвестную величину буквой; составить по условию задачи уравнение; решить составленное уравнение; ответить на вопрос задачи.

В учебнике [4] в предварительном задании № 587 требуется составить буквенные выражения и математические модели ситуаций с ключевыми словами «столько же», «на больше», «в больше», в № 593 — объяснить буквенные выражения и уравнения, в № 594 — решить задачу алгебраическим способом, объяснив, как составлено уравнение, и сравнить свое решение с текстом учебника. Предложено три этапа решения задач методом уравнений: 1) составление математической модели (составление уравнения по условию задачи); 2) работа с математической моделью (решение уравнения); 3) ответ на вопрос задачи.

В учебниках [4, 7, 8] остаются без обсуждения вопросы: почему именно эту величину обозначили буквой, можно ли иную неизвестную обозначить буквой; почему именно эти величины выражаем через неизвестную; почему именно это условие выбрано для составления уравнения, а можно ли выбрать иное условие; как распознать задачи, в которых требуется метод уравнений, и др.

Психологи, исследовавшие состав умственных действий при решении задач методом уравнений, пришли к выводу, что процесс будет более целенаправленным, если сначала выяснить, числовые значения каких величин можно уравнивать [13, с. 139].

Такой подход к обучению алгебраическому методу решения с учетом ответов на сформулированные выше вопросы, оставшиеся без обсуждения в других школьных учебниках, реализован в [10, с. 132–139]. При этом в тексте учебника реализовано проблемное обучение, этапами которого являются вопросы-проблемы:

- что общего и чем отличаются две текстовые задачи;
- как объяснить предложенные способы решения каждой задачи арифметическим способом;
- верно ли, что решить первую задачу можно с помощью предложенных уравнений, если да, то какая неизвестная величина из условия задачи обозначена в каждом уравнении через x , что означает каждое из перечисленных в тексте выражений, на основании какого условия задачи составлено каждое уравнение;
- какую из предложенных задач легче было решать с помощью уравнения;
- каковы шаги решения задач с помощью уравнений.

Рассмотрим использование текстовых задач для закрепления изученного. Можно выделить три ситуации: закрепляются вычислительные навыки; закрепляется вид задач или метод решения; закрепляется опыт работы с текстовой задачей.

Согласно психолого-педагогическим требованиям к формированию умений [5, с. 155] каждый шаг работы с задачей (метода решения) должен быть отработан на специальных упражнениях. Примером таких упражнений на отработку алгебраического метода являются задания 63–65 из [10], в которых учащиеся учатся соотносить корни уравнения с условием задачи.

В случае закрепления опыта работы с текстовой задачей при анализе учебников следует обращать внимание, как авторы: учат проводить анализ условия задачи; организуют поиск способа решения; рассматривают способы оформления решения; подводят итоги работы над задачей. Если соответствующие виды деятельности не предусмотрены в используемом учителем учебнике, то ему требуется проводить дополнительную работу с учащимися, отрабатывая необходимый состав деятельности учащихся. Для чего можно использовать задания УМК «Математика. Психология. Интеллект», в котором представлены: все способы оформления краткой записи условия задачи и вопросы, которые полезно задавать самому себе при анализе условия задачи; ведение поиска способа решения задачи

арифметическим или алгебраическим методом; все способы оформления решения задачи арифметическим или алгебраическим методом; обсуждение иных вариантов решения задачи; обсуждение влияния изменения данных в задаче на способ решения; конструирование обратных задач, вопросов к задаче, текста задачи по ее краткой записи и др., что значительно обогащает субъектный опыт учащихся.

Для достижения целей закрепления изученного с использованием текстовых задач возможно использование различных образовательных технологий, представленных в учебниках: игровых, групповых, дифференцированного обучения и др.

Примером реализации игровой технологии может служить задание № 358 из [9], в котором требуется разложить утверждения относительно движения двух пешеходов по ящикам: идут навстречу друг другу; идут в одном направлении; удаляются друг от друга в противоположных направлениях; мусорный ящик. Результатом выполнения задания будет выделение ряда характеристик каждого вида движения.

Можно привести примеры реализации различных образовательных технологий с использованием текстовых задач в курсе математики 7–11 классов.

Новые возможности для научно-методических исследований открываются в связи с введением в практику школы электронных учебников математики и других электронных образовательных ресурсов.

Литература

1. Виленкин Н. Я., Жохов В. И., Чесноков А. С., Шварцбурд С. И. Математика. 6 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений / 30-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2013. — 288 с.
2. Гельфман Э. Г., Холодная О. В. Математика: Учеб. для 6 кл. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. — 200 с.
3. Зубарева И. И., Мордкович А. Г. Математика. 5 кл.: Учеб. для учащихся образоват. учреждений / 8-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2013. — 270 с.
4. Зубарева И. И., Мордкович А. Г. Математика. 6 кл.: Учеб. для учащихся образоват. учреждений / 8-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2009. — 264 с.
5. Малова И. Е., Горохова С. К., Малинникова Н. А., Яцковская Г. А. Теория и методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов вузов. — М.: Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2009. — 445 с.
6. Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н., Шевкин А. В. Математика. 5 кл.: Учеб. для общеобразоват. организаций / 14-е изд. — М.: Просвещение, 2015. — 272 с.

7. Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н., Шевкин А. В. Математика. 6 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений / 14-е изд. — М.: Просвещение, 2012. — 256 с.
8. Бунимович Е. А., Кузнецова Л. В., Минаева С. С. Математика. Арифметика. Геометрия. 6 кл.: Учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / 3-е изд. — М.: Просвещение, 2014. — 240 с.
9. Гельфман Э. Г. Математика: Учебная книга и практикум для 5 кл.: в 2-х ч. Ч. 1: Натуральные числа и десятичные дроби / 9-е изд. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — 240 с.
10. Гельфман Э. Г. Математика: Учебная книга и практикум для 6 кл.: в 2-х ч. Ч. 1: Делимость чисел / 4-е изд. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. — 184 с.
11. Селевко Г. К. Энциклопедия образовательных технологий: в 2-х т. Т. 1. — М.: НИИ школьных технологий, 2006. — 816 с.
12. Селевко Г. К. Энциклопедия образовательных технологий: в 2-х т. Т. 2. — М.: НИИ школьных технологий, 2006. — 815 с.
13. Слепкань З. И. Психолого-педагогические основы обучения математике: Метод. пособие. — Киев: Радянська школа, 1983. — 192 с.

Малова Ирина Евгеньевна
Брянский государственный университет
им. академика И. Г. Петровского
РОССИЯ, 241036, Брянск, ул. Бежицкая, 14;
Южный математический институт — филиал ВНИЦ РАН
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
E-mail: mira44@yandex.ru,

REALIZATION OF EDUCATIONAL TECHNOLOGY OF TEXT PROBLEM'S SOLUTION IN SCHOOL TEXTBOOKS OF MATHEMATICS

Malova I. E.

The methods of school textbook's analysis by using activity approach, personal oriented education and various educational technologies on the example of text problem's solution are proposed. The methods take into account: purposes; scheme for the analysis of text problems in textbooks from the standpoint of approach's realization; the purpose of text's problems inclusion in school textbooks; methodological basis for the attainment of these objectives; features of selected educational technologies using.

Key words: educational technology, activity approach, personally oriented education, a text task, the content of school mathematics textbooks.

О НОВОЙ «АТОМИЗАЦИИ» НАУЧНОЙ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СФЕРЫ

В. П. Одинец

В работе на исторических примерах и обзоре современного состояния науки обосновывается цикличность отношения к математике, как основному ядру формализации науки и ее связи с образованием. При увеличении связей за счет Интернета наблюдается фрагментация тем работы отдельных математиков, названная «атомизацией».

Ключевые слова: цикличность отношения, Интернет, очно-заочное образование, А. Пуанкаре, П. А. Флоренский.

Введение

1–3 июля 1996 г. в Санкт-Петербурге прошла Международная научная конференция «Мировые модели взаимодействия науки и высшего образования». На этой конференции в ряде работ подчеркивалась «... ясно видимая тенденция к большей дисперсности «научной массы», к большему разнообразию форм ее структурирования» и одновременно «необходимость успешного решения в первые десятилетия XXI века интеграции высшего образования и науки» [1, 2]. Наиболее глубокой в этом контексте была статья Р. В. Рывкиной [3], проанализировавшей состояние взаимодействия науки и образования в тогдашней России на примере Новосибирского университета.

1. Враждебное отношение к творцам науки и образования

Прошло 20 лет. За это время появление и широкое использование Интернета только усилило «атомизацию» (т. е. дезинтеграцию) науки и образования при фактической ликвидации (благодаря Интернету) государственных границ для связи. И это происходит на фоне растущего враждебного отношения общества к науке и к людям, ее творящим [4], несмотря на заинтересованность властей в развитии

собственного военно-промышленного комплекса. Проявления этого отношения многообразны — не буду их перечислять¹. Разумеется, доля ответственности за это положение лежит и на ученых. Это, прежде всего, идущая от эпохи Возрождения уверенность в способности науки в решении любых проблем, стоящих перед человечеством: от технических до экономических, сильно подорванная техногенными катастрофами от Чернобыля и Фукусимы до аварии на Саяно-Шушенской ГЭС и экономическим кризисом 2008 г. Не следует думать, что наша страна в этом как-то особо выделяется. Этой тенденции пока «сопротивляются» только страны Юго-Восточной Азии, в первую очередь Китай и Индия, да и в них проявления этой тенденции становятся все более ощутимыми.

Впрочем, о том, что станет с наукой в наше время, почти 100 лет тому назад в статье «Итоги» (ноябрь-декабрь 1922 г.) писал о. Павел (Павел Александрович Флоренский (1882–1937)), предсказывая ««возрожденческой»² науке такое же гибельное будущее, как первобытным магическим представлениям, но более суровое, более беспощадное, поскольку и сама она была беспощадна к человеку» [5].

Теперь остановимся на проблемах образования. Нет нужды говорить, что информационные базы науки и образования развивались в большей мере независимо. Развитие информатики, точнее информационной структуры, в системе наука–образование позволило за истекшие 20 лет объединить информационные ресурсы в единый информационный фонд, что объективно видоизменило положение центральной фигуры в образовательных технологиях, а именно, преподавателя. С одной стороны, это подтвердило старую истину о том, что настоящее образование добывается только самообразованием. С другой стороны, оно открыло новые широкие возможности для индивидуальной работы преподавателя со студентами.

Важно отметить, что за истекшие 20 лет существенно изменилась политика западных стран и их компаний по отношению к постсоветской России. Если еще в начале 90-х гг. XX века эти страны в первую очередь были заинтересованы в приеме ученых из России (особенно молодых) или, по крайней мере, имеющих перспективные обра-

¹Будучи в 2015 г. Сопредседателем Координационного Совета Санкт-Петербургского союза ученых, сталкивался с этими проявлениями чуть ли не ежедневно.

²Т. е. ведущей свое начало от эпохи Возрождения.

зовательные и квалификационные характеристики специалистов из России, переезжающих на постоянное место жительства в эти страны [6], то в середине нулевых годов XXI века появилась устойчивая тенденция работы на западных заказчиков внутри России, связанная с возможностью удаленного доступа к современным компьютерам.

2. Цикличность в отношении к науке и образованию

Конечно, политика Запада по отношению к России носит циклический характер. Как, впрочем, циклический характер носит цивилизационная проблема связи образования и науки (или ее элементов), особенно на ранних стадиях развития человеческого общества.

Первый яркий пример полной централизации образования с элементами науки (или, как теперь модно говорить, директивное управление образованием) мы находим уже при изучении III династии Ура в Месопотамии (2111–2014 гг. до н.э.) со столицей в г. Ур в Нижней Месопотамии. При этом потребности административного аппарата этого государства требовали не только грамотных чиновников, но и того, чтобы «часть выпускников школ (куда принимали и детей из незнатных семей) оставалась при школах, и они, помимо административной работы и преподавания, занимались созданием учебников, составлением литературных сборников, изданием хроники, написанием законов» [7, с. 47–50]. Отметим, что из 200 тысяч сохранившихся до наших дней плиток с клинописью около 100 тысяч приходится на документы именно III династии Ура [8].

Конечно, директивное управление образованием, а позже и наукой, эффективно только в период расцвета государства. При распаде государств (цивилизаций) ясно просматривается дезинтеграция и образовательной, а позже и научной сфер. Отчетливо видно это на примере периода заката эллинской культуры в 5–6 веках новой эры, когда ученые Средиземноморья разъехались от Малой Азии до Индии.

Схожие процессы характерны при смене парадигмы развития цивилизационных центров на автаркию, что видно на примере Китая (политика *хайцзин*) XV–XVI веков нашей эры [9, 10].

3. «Атомизация» сферы науки в эпоху Интернета

Распад СССР в начале 90-х гг. XX века совпал по времени с созданием и победным шествием Интернета по всему земному шару [11]. Этому способствовали, в частности, минимальная энерго- и материалоемкость новых информационных технологий в условиях всеобъемлющего экологического кризиса, который переживает человечество с 80-х гг. прошлого века. При этом человечество достигло необходимого для повсеместного внедрения этих технологий уровня математизации. Как повторил вслед за Анри Пуанкаре (1854–1912) И. Р. Шафаревич: «... можно сказать, что мы живем в Математической Цивилизации — и, может быть, умираем вместе с нею» [12, 13].

Появление многомиллионных по охвату пользователей социальных компьютерных сетей и вместе с тем развитие средств контроля за каждым пользователем этих сетей на основе высокопроизводительных многопроцессорных вычислительных систем с распределенной памятью, в принципе, оказалось далеко от решения конкретных прикладных задач, для которых создавались эти вычислительные системы [14].

Отметим, что чем выше производительность системы, чем большее число процессоров в ней задействовано, тем меньше коэффициент ее реального использования [14]. Трудности визуализации огромного объема информации, хранящейся в памяти этих вычислительных систем (например, АНБ США), приводит либо к примитивизации этой информации, либо к многоступенчатой задаче, основанной на специальных индикаторах, использующих особенности конкретной задачи.

В целом работа даже таких признанных научных центров, как ЦЕРН (Женева), как Национальный центр научных исследований Франции, как общество Макса Планка в ФРГ, фактически в последнее время начинает распадаться на работы ее отдельных специалистов, зачастую работающих дома и только периодически связывающихся с базовым предприятием.

Способствует этой «атомизации» огромная дифференциация науки, даже математикам трудно понять друг друга, что уж говорить о других специалистах. Не случайно строительство здания науки сравнивается со строительством Вавилонской башни со всеми библейскими последствиями.

С другой стороны, Интернет при огромных возможностях связи людей друг с другом сделал научных работников более независимыми, фактически сделал их как бы сотрудниками Института Перспективных Исследований в Принстоне, позволив, в определенной мере, самим выбирать тему исследований и знакомить широкую научную общественность с ее результатами, что, несомненно, положительно.

4. Заочное образование как признак «атомизации» образования

В силу ряда исторических причин именно в России в 1916 г. в Ростове-на-Дону (а позже в СССР) массовый характер приобрело заочное образование [15], естественным образом соединившись уже в России в 90-е гг. с дистанционным компьютерным обучением. При этом дистанционное обучение, начавшись фактически с обучения космонавтов еще в середине 60-х гг., постепенно перешло в вузы, а с начала 90-х гг. даже в школы. Так, например, в Коми Республиканском лицее-интернате для одаренных детей из сельской местности города Сыктывкара очно-заочная система действует с 1992 г. Дети (и их учителя) получают задания и 2–3 раза в год приезжают на сессии [16].

Кстати, нечто подобное в середине нулевых годов XXI века было организовано и в США (в 45 штатах) выходцами из СССР³. Замечу, что среди уехавших в 80-е гг. в США учителей математики был один из лучших методистов-математиков Ленинграда (Санкт-Петербурга) Юрий Иосифович Ионин (Ionin Yu. I), преподававший в интернате при ЛГУ и ставший в Америке в возрасте более 50 лет профессором математики Department of Mathematics в Central Michigan University⁴.

Отметим, что заочное обучение, даже при всех его недостатках, сыграло в СССР весьма положительную роль, способствовав полу-

³В США обычным детям в школе домашние задания не даются. Однако детям с высоким уровнем IQ задания на дом при соблюдении определенных условий возможны.

⁴Среди его работ, опубликованных в последние годы, хотел бы выделить две, послужившие для задач олимпиад по математике, включая и всемирные, для школьников и студентов: 1) Ионин Ю. И. Конечные проективные плоскости. Мат. просв. 2009. Вып. 13. С. 50–79. 2) Ионин Ю. И. Строго равнобедренные множества. Мат. просв. 2011. Вып. 15. С. 154–175. (Кстати, последняя работа является решением обобщения известной проблемы П. Эрмита 1947 г.)

чению высшего образования сотням тысяч людей. Предшественницей заочного образования в дореволюционной России был экстернат. Многие известные наши соотечественники получили высшее образование именно через экстернат. Достаточно упомянуть В. И. Ульянова (Ленина) (1870–1924) и К. Э. Циолковского (1857–1935) [18, 19].

5. Резкое падение интереса молодежи к занятиям математикой (и физикой) — еще один признак «атомизации» сферы образования

В развитых странах Запада (а не только в России) у молодежи наблюдается нежелание заниматься математикой. Бывая с лекциями и докладами в этих странах, вижу, как пустуют факультеты математики. Не спасают положения даже выходцы из Юго-Восточной Азии. И это при том, что еще по словам Г. Галилея (1564–1642) «книга науки написана на языке геометрии» (в ту пору геометрией называли математику).

Повсеместно закрываются (или объединяются) кафедры чистой математики. Но если на Западе профессия учителя, по крайней мере, еще пользуется определенным престижем и, соответственно, оплачивается лучше любой рабочей профессии, в России ситуация совсем другая. Еще хуже положение вузовских преподавателей, особенно молодых. Ненормально высокая нагрузка не позволяет им реально заниматься наукой. Немного в этом плане дает и аспирантура, ставшая в последние годы, вместо написания диссертации, в основном способом повышения квалификации [17]. Явно недостаточно и новых структур научно-технической сферы: инкубатор, технопарк и технополис. В итоге усталость от вербального общения приводит к «замыканию» этих преподавателей на компьютер, что подтверждается уменьшением числа часов на математику при обучении в школе и вузе и увеличением числа часов на изучение информатики. Так происходит не только в России, но и на Западе. Косвенно, как ни странно, это подтверждается регулярными победами студентов и школьников из России на всемирных олимпиадах по информатике в отличие от олимпиад по математике, где с 2007 г. команда школьников опускается все ниже.

Пришедшее с Запада и поддержанное Министерством образования и науки РФ «поветрие» иметь вузовским преподавателям как

можно больше публикаций⁵, приводит (как и на Западе) к объединению лиц, каждый из которых работает самостоятельно по определенной теме, но подписывают статьи вместе, получая в итоге больше публикаций. Увеличению числа публикаций служат и расплодившиеся в последние годы всевозможные псевдонаучные журналы, публикующие статьи за деньги. Впрочем, не стесняются брать деньги за публикации и вполне известные научные журналы. При внешнем увеличении числа публикаций их глубина и значимость явно уменьшаются, что косвенно подтверждает тезис об «атомизации» научной и образовательной сферы.

Литература

1. *Одинец В. П.* О логике развития науки и логике развития высшего образования // Мировые проблемы взаимодействия науки и высш. образования. — СПб: Изд-во СПбГТУ, 1997. — С. 49–52.
2. *Юсупов Р. М.* Информатизация как мощный фактор интеграции науки и высшего образования // Мировые проблемы взаимодействия науки и высш. образования. — СПб: Изд-во СПбГТУ, 1997. — С. 91–98.
3. *Рывкина Р. В.* Возможно ли взаимодействие науки и высшего образования в современной России? // Мировые проблемы взаимодействия науки и высш. образования. — СПб: Изд-во СПбГТУ, 1997. — С. 33–38.
4. *Паршин А. Н.* Еще раз о «научной картине мира» // Путь. Математика и другие миры. — М.: Добросвет, 2002. — С. 115–133.
5. *Флоренский П. А.* У водоразделов мысли: V. Итоги // Эстетические ценности в системе культуры. Сб. научн. статей Ин-та философии АН СССР. — М.: 1986. — С. 122–132.
6. *Верёвкин Л. П.* Еще раз об «утечке умов» // Вестн. РАН. — Т. 72, № 9. — С. 795–799.
7. *Сарданишвили Г. А.* Между рассветом и закатом // Советская физика в 1950–1979 гг. — М.: Ленанд, 2014. — 232 с.
8. История древнего мира. Т. 1. Ранняя древность / Под ред. И. М. Дьяконова и др. — М.: Гл. ред. восточной лит., 1989.
9. *Dreyer E. L., Zheng H.* China and the Oceans in the Early Ming Dynasty, 1405–1433. — N. Y.: Pearson Longman, 2007. — 256 p. — (Library of World Biography Series.)
10. *Bowman J. S.* Columbia Chronologies of Asian History and Culture. — N. Y.: Columbia Univ. Press, 2000. — 769 p.
11. *Одинец В. П.* Зарисовки по истории компьютерных наук. — Сыктывкар: Изд-во Коми гос. пед. ин-та, 2013. — 420 С.
12. *Шафаревич И. Р.* Математическое мышление и природа // Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli. — 1994. — Vol. 43, № 1.

⁵ Речь идет, прежде всего, о публикациях, попадающих в Sci Verse Scopus и в РИНЦ-Science Index.

13. *Шафаревич И. Р.* Полное собрание сочинений в 6 т. Т. 6 / Отв. ред. О. А. Платонов. — М.: Институт русской цивилизации, 2014. — С. 380–389.
14. *Четверушкин Б. Н.* Высокопроизводительные многопроцессорные вычислительные системы // Вестн. РАН. — 2002. — Т. 72, № 9. — С. 786–794.
15. *Vajapov B.* Avec Stalin dans le Kremlin. — Paris: Les Edition de France, 1930. (*Бажанов Б. Г.* Я был секретарем Сталина. — М.: Алгоритм, 2014. — 304 с.)
16. *Палкина М. А.* Профильное обучение старшеклассников из сельской местности по инновационной образовательной системе «сельская школа-лицей-интернат-вуз» // Профильная школа. — 2013. — Т. 1, № 5. — С. 13–22.
17. *Одинец В. П.* О некоторых проблемах подготовки аспирантов по теории и методике обучения математике // Вестн. Московского ун-та. — 2012. — Сер. 20, № 4. — С. 3–8.
18. *Циолковский К. Э.* Черты из моей жизни. — Калуга: Золотая аллея, 2002. — 148 с.
19. *Горностаев П. В.* О теории общего образования взрослых до Октября и в первые годы после Революции: Учеб. пособие. — М.: 1974. — 86 с.

Одинец Владимир Петрович
Институт точных наук и информационных технологий
РОССИЯ, 167001, Сыктывкар, Октябрьский пр., 55
E-mail: w.p.odyniec@mail.ru

ON A NEW «ATOMIZATION» OF SCIENTIFIC AND EDUCATIONAL SPHERE

Odyniec W. P.

In this paper the recurrence of main kernel of formalization of science and its links with mathematics education is proved. There are used the historical examples and the review of modern sciences. At the increasing of communications with Internet the fragmentation of interest's subjects in mathematics called «atomization» is observed.

Key words: cyclical relationships, internet, part-time education, Poincaré, P. A. Florensky.

Вниманию авторов

«Математический форум (Итоги науки. Юг России)» — научное периодическое издание, выходящее не менее одного раза в год. Сборник издается Южным математическим институтом — филиалом Владикавказского научного центра РАН.

К публикации в сборник принимаются материалы региональных, российских и международных форумов (конференций, симпозиумов, семинаров и т. д.), освещающие новейшие достижения современной математической науки. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в другом издательстве, редколлегией не рассматриваются. При отборе материалов для сборника определяющим является высокий научный уровень. Поступившие в редакцию статьи проходят обязательное научное рецензирование.

Текст статьи должен быть написан на русском или английском языке и тщательно выверен. В начале статьи указывается индекс УДК, Ф.И.О. автора(ов), аннотация (не содержащая формул) и ключевые слова. Название статьи, Ф.И.О. автора(ов), аннотацию и ключевые слова необходимо дать на английском и русском языках.

Список литературы печатается в конце текста статьи. В нем должны быть указаны: для статей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

Статья подписывается автором (коллективом авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса, места работы, должности, полного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона.

Объем материала должен быть не более 1,4 усл. печ. листа (≈ 12 с. формата А5). Статьи большего объема могут быть приняты к публикации по решению редколлегии в исключительных случаях.

Статью необходимо подготовить с использованием макропакета LaTeX и оформить согласно стандартным требованиям, предъявляемым к авторским оригиналам. При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей,

особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. В редакцию статьи направлять по электронной почте в виде ps- или pdf-файла и tex-файла, либо по почте с приложением электронной версии.

Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

Принятые к публикации в сборник статьи проходят редакционную подготовку, после чего текст статьи направляется автору на корректуру. Плата за публикацию не взимается.

Авторские права на сборник в целом принадлежат Южному математическому институту — филиалу ВНЦ РАН и Редколлегии журнала, которые обладают исключительным правом получать и распределять любые платежи, связанные с переуступкой авторских прав на сборник.

АДРЕС РЕДАКЦИИ: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22

ТЕЛЕФОН: (8672) 53-84-62; ФАКС: (8672) 53-93-27

E-MAIL: rio@smath.ru

ЗАВ. РЕДАКЦИЕЙ: Кибизова В. В.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
-------------------	---

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

Абиев Н. А., Никоноров Ю. Г. Об эволюции римановых метрик положительной кривизны на пространствах Уоллаха под влиянием потока Риччи	11
Батхин А. Б. Глобальная параметризация некоторой алгебраической поверхности	25
Брюно А. Д. Выпуклый многогранник в асимптотическом анализе	37
Ватульян А. О., Нестеров С. А. Динамические задачи термоэлектростатости для неоднородных тел	55
Смирнов Н. Е., Тестов В. А. Сетевые технологии в образовании: переход к синергетической парадигме	68

I. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Аливердиев А. А., Ахмедов Э. Н., Бейбалаев В. Д., Магомедов Р. А., [Мейланов Р. П.], Мейланов Р. Р. К анализу термодинамических характеристик на основе фрактального уравнения состояния	83
Васильев В. Б. О краевых задачах для дискретного лапласиана в полупространстве	95
Пасенчук А. Э. О нестандартной частичной мультипликативности в теории двумерных операторов Теплица и ее приложениях	103
Шустов В. В. О представлении интегралов значениями функции и ее производных на основе использования двухточечных многочленов Эрмита	113

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Казарников А. В., Ревина С. В. Бифуркации в системе Рэлея с диффузией	125
Каримов Ш. Т. Приложение оператора Эрдейи — Кобера к решению краевой задачи для полипараболического уравнения с оператором Бесселя	135
Кукушкин М. В. Об одном методе оценки роста собственных значений задачи Штурма — Лиувилля для дифференциального оператора второго порядка с дробными производными в младших членах	146
Курбатова Н. В., Портнов Е. Н., Устинов Ю. А. О задаче растяжения-кручения канатов	157
Переварюха А. Ю. Дифференциальные уравнения численности поколений с влиянием меняющейся скорости роста особей волжских осетровых	169
Плиева Л. Ю. Квадратурные формулы для интегралов типа Коши с весовыми функциями	179
Хубежты Ш. С. Численное решение гиперсингулярных интегральных уравнений I рода	185
Черныш А. С. Асимптотика спектров устойчивости стационарных течений несжимаемой жидкости в зазоре между двумя сферами	200

III. СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Бабенко А. С., Елкин Д. В., Пигузов А. А., Секованов В. С., Смирнов Е. И. Особенности синергии алгоритмов и исследования множеств Жюлиа полиномов Чебышева	217
Богун В. В. Реализация студентами вузов динамических расчетных проектов в рамках дистанционного обучения математике	228

Дворяткина С. Н., Розанова С. А. Математическое моделирование при решении профессиональных и прикладных проблем как важнейшее направление интегративных курсов	235
Малова И. Е. Текстовые задачи: реализация образовательных технологий в содержании школьных учебников математики	244
Одинец В. П. О новой «атомизации» научной и образовательной сферы	255

С е р и я

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФОРУМ. Т. 11

Исследования по математическому анализу,
дифференциальным уравнениям и их приложениям

Научное издание

Редакторы серии:
Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев

Редакторы тома:
А. В. Абанин, С. Н. Асхабов,
А. О. Ватульян, И. Е. Малова

Формат 60×84/16
Усл. печ. л. 15,58. Уч.-из. л. 11,81
Тираж 300 экз.
Заказ № ____

Российская академия наук
119991, Москва, Ленинский проспект, 14
www.ras.ru

Верстка Южного математического
института — филиала ВНЦ РАН
362027, Владикавказ, ул. Маркуса, д. 22
www.smath.ru

Корректura ООО «Нюанс»
Москва, ул. Дмитрия Ульянова, д. 26 а, стр. 2

Отпечатано в цифровой типографии ООО «Буки Веди»
115093, Москва, Партийный пер., д. 1, корп. 58
www.bukivedi.com